Vertiefung der Funktionentheorie

Wintersemester 2009/2010

Universität Bayreuth

Michael Stoll

Inhaltsverzeichnis

0. Wiederholung

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Begriffe und Sätze zusammen, die aus der „Einführung in die Funktionentheorie" bekannt sein sollten.

0.1. **Isolierte Singularitäten und Laurentreihen.**

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z \in D$. Ist $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z\})$, so heißt z *isolierte Singularität* von f.

Allgemein gilt, dass sich eine holomorphe Funktion f auf einem Kreisring

$$\{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

in eine konvergente *Laurentreihe* entwickeln lässt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit (für $r < \rho < R$ beliebig)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \rho} (\zeta - z_0)^{-n-1} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Dabei heißt die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *konvergent* an einer Stelle $z \in \mathbb{C}$, wenn die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ konvergieren; der Wert der Laurentreihe ist dann die Summe der Werte dieser beiden Reihen.

Insbesondere gilt: Ist z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f, dann ist f holomorph auf einer punktierten Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\} = U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

und ist dort gegeben durch eine konvergente Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,.$$

Ist f auf einer solchen punktierten Kreisscheibe beschränkt, dann sind für $n < 0$ alle $a_n = 0$, die Singularität ist *hebbar*, und f lässt sich holomorph nach z_0 fortsetzen durch $f(z_0) = a_0$ (Riemannscher Hebbarkeitssatz).

Gilt $a_n = 0$ für $n < -k$, aber $a_{-k} \neq 0$ (mit $k \geq 1$), dann hat f bei z_0 einen *Pol der Ordnung* k (oder einen *k-fachen Pol*). Dies ist äquivalent mit $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Sind unendlich viele Koeffizienten a_n für $n < 0$ von null verschieden, dann nennt man z_0 eine *wesentliche Singularität*. In diesem Fall liegt das Bild unter f jeder (beliebig kleinen) punktierten Umgebung von z_0 dicht in $\mathbb{C}$ (Satz von Casorati-Weierstraß). (Tatsächlich gilt sogar, dass f nahe z_0 höchstens einen Wert auslässt (Satz von Picard).)

0.2. **Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel.**

Sei γ ein nullhomotoper geschlossener Weg im Gebiet D, f holomorph in D. Dann gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

(Cauchyscher Integralsatz).

Für die „Umlaufzahl-Version“ der Cauchyschen Integralformel müssen wir uns an die *Umlaufzahl* erinnern: Sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$, $z \notin |\gamma|$ (wir schreiben $|\gamma|$ für das Bild $\gamma([a,b])$, wenn $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$). Dann setzen wir

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \in \mathbb{Z}\,.$$

Damit haben wir folgende Version der Cauchyschen Integralformel: Sei f im Gebiet D holomorph, γ ein in D nullhomotoper geschlossener Weg. Dann gilt für alle $z \in D \setminus |\gamma|$:

$$I(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

0.3. **Homotopie von Wegen.**

Was bedeutet „nullhomotop“? Es gibt den allgemeinen Begriff der *Homotopie* von Wegen:

Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to D$ heißen *homotop* in D, wenn es eine stetige Funktion (*Homotopie*) $H : [0,1] \times [a,b] \to D$ gibt mit $H(0,t) = \gamma_0(t)$ und $H(1,t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a,b]$. Man kann sich H als eine stetige Familie von Wegen $\gamma_s : t \mapsto H(s,t)$ vorstellen, die γ_0 „stetig in γ_1 deformiert“.

Die Wege γ_0 und γ_1 heißen *homotop mit festen Endpunkten*, wenn es zusätzlich $z_0, z_1 \in D$ gibt mit $H(s,a) = z_0$ und $H(s,b) = z_1$ für alle $s \in [0,1]$. (Insbesondere haben dann γ_0 und γ_1 den selben Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1.)

Die Wege γ_0 und γ_1 heißen *homotop als geschlossene Wege*, wenn H zusätzlich die Bedingung $H(s,a) = H(s,b)$ für alle $s \in [0,1]$ erfüllt. Das bedeutet, dass alle Wege γ_s geschlossen sind.

Ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to D$ heißt *nullhomotop* in D, wenn es einen konstanten Weg c gibt, so dass γ und c in D homotop als geschlossene Wege sind. Anschaulich bedeutet das, dass man γ innerhalb von D stetig zu einem Punkt zusammenziehen kann.

Die wesentliche Aussage (aus der der Cauchysche Integralsatz folgt) ist hier, dass für zwei Wege γ_0 und γ_1 in D, die in D homotop mit festen Endpunkten sind, und eine in D holomorphe Funktion f gilt

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Die selbe Aussage gilt, wenn γ_0 und γ_1 als geschlossene Wege in D homotop sind.

1. Der Residuensatz

Der Residuensatz lässt sich als Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel verstehen. Ihr Integrand $f(\zeta)/(\zeta - z)$ ist holomorph auf D mit Ausnahme einer isolierten Singularität (hebbar oder einfacher Pol) bei z. Der Residuensatz erweitert dies zu einer Formel für das Integral einer Funktion mit beliebigen isolierten Singularitäten.

1.1. **Definition.** Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f. Dann ist f in einer punktierten Umgebung von z_0 durch eine konvergente Laurentreihe darstellbar:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,.$$

Das *Residuum* von f bei z_0 ist dann

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1} \,.$$

damit können wir den Residuensatz formulieren.

1.2. **Satz (Residuensatz).** *Sei γ ein geschlossener, im Gebiet D nullhomotoper Weg. Seien weiter $z_1, \ldots, z_m \in D \setminus |\gamma|$, und sei $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{z_1, \ldots, z_m\})$. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} I(\gamma, z_j) \operatorname{Res}_{z_j} f \,.$$

Bevor wir den Residuensatz beweisen, wollen wir uns noch überlegen, wie man das Residuum berechnen kann, wenn die fragliche Singularität ein Pol ist.

1.3. **Lemma.** *Sei z_0 eine isolierte Singularität der holomorphen Funktion f.*

(1) *Hat f bei z_0 einen einfachen Pol, dann gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \,.$$

(2) *Sind f und g bei z_0 holomorph, und hat g eine einfache Nullstelle bei z_0, so gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \,.$$

(3) *Hat f bei z_0 einen k-fachen Pol, dann ist $g(z) = (z - z_0)^k f(z)$ in z_0 holomorph, und*

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \,.$$

Beweis.

(1) Die Laurentreihe von f um z_0 hat die Form

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots \,.$$

Daher ist $(z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) g(z)$ mit g holomorph in z_0. Es folgt $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f$.

(2) Es gilt $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\tilde{f}(z)$ und $g(z) = g'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)^2\tilde{g}(z)$ mit bei z_0 holomorphen Funktionen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$. f/g hat einen einfachen Pol bei z_0; nach Teil (1) folgt

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0) + (z - z_0)\tilde{f}(z)}{g'(z_0) + (z - z_0)\tilde{g}(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} .$$

(3) Die Laurentreihe von f um z_0 hat die Form

$$f(z) = a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{-1} + \cdots .$$

Also ist

$$g(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \cdots$$

holomorph in z_0 (genauer: g hat eine hebbare Singularität, die wir stillschweigend durch holomorphe Fortsetzung verschwinden lassen), und

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

nach der üblichen Formel für Koeffizienten von Potenzreihen.

□

1.4. **Übung.** Zeigen Sie folgende Aussage:

f habe einen einfachen Pol bei z_0, und g sei holomorph bei z_0. Dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} fg = g(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f .$$

1.5. **Beispiel.** Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$. f ist holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von zwei isolierten Singularitäten bei $z = \pm i$ (wo der Nenner Nullstellen hat). Die Nullstellen des Nenners sind einfach, also hat f einfache Pole, und die Residuen sind nach Lemma 1.3, (2)

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} \quad \text{und} \quad \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2} .$$

Zum Beweis des Residuensatzes brauchen wir folgende Aussage.

1.6. **Lemma.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$ und f holomorph in $D \setminus \{z_0\}$. Dann gibt es holomorphe Funktionen $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ und $f_0 : D \to \mathbb{C}$ mit $f = f_0 + f_1$ auf $D \setminus \{z_0\}$.*

f_1 heißt dann auch der *Hauptteil* von f bei z_0, f_0 dementsprechend der *Nebenteil*.

Beweis. Sei $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subset D$. Dann ist f auf $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ durch eine konvergente Laurentreihe darstellbar:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Wir setzen

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \Big(\frac{1}{z - z_0}\Big)^n .$$

Die f_1 definierende Reihe konvergiert für $|z - z_0|^{-1} > 1/r$, nach den Konvergenzsätzen für Potenzreihen also auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Damit ist $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definiert. Sei $f_0 = f - f_1$, zunächst auf $D \setminus \{z_0\}$. Auf $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ stimmt f_0 mit der durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ gegebenen Funktion überein, die in z_0 eine hebbare Singularität hat. Also können wir f_0 holomorph auf D fortsetzen. □

1.7. **Folgerung.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_1, z_2, \dots, z_m \in D$, und f sei holomorph auf $D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$. Dann gibt es holomorphe Funktionen $f_0 : D \to \mathbb{C}$ und $f_j : \mathbb{C} \setminus \{z_j\} \to \mathbb{C}$ für $j = 1, \dots, m$ mit $f = f_0 + f_1 + \dots + f_m$ auf $D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$.*

Beweis. Durch Induktion mittels Lemma 1.6. Oder man definiert f_j als den Hauptteil von f bei z_j und $f_0 = f - f_1 - \dots - f_m$, und verifiziert wie im Beweis von Lemma 1.6, dass f_0 in allen z_j hebbare Singularitäten hat. □

Wir beweisen jetzt erst einmal folgenden Spezialfall des Residuensatzes:

1.8. **Lemma.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, f holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, und sei γ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ mit $z_0 \notin |\gamma|$. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i I(\gamma, z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f\,.$$

Beweis. f ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ durch eine konvergente Laurentreihe dargestellt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n\,.$$

Sei

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}\,.$$

Dann gilt

$$F'(z) = f(z) - \frac{a_{-1}}{z-z_0} = f(z) - \frac{1}{z-z_0} \operatorname{Res}_{z_0} f\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma F'(z)\,dz + \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} \cdot \operatorname{Res}_{z_0} f \\ &= 0 + 2\pi i\, I(\gamma, z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f \end{aligned}$$

nach Definition der Umlaufzahl. □

Beweis des Residuensatzes. Nach Folgerung 1.7 können wir schreiben

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_m\,,$$

wobei f_0 auf D und für $j = 1, \dots, m$ die Funktionen f_j auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ holomorph sind. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_\gamma f_0(\zeta)\,d\zeta + \sum_{j=1}^m \int_\gamma f_j(\zeta)\,d\zeta \\ &= 0 + \sum_{j=1}^m 2\pi i I(\gamma, z_j) \operatorname{Res}_{z_j} f \end{aligned}$$

nach dem Cauchyschen Integralsatz und Lemma 1.8. □

1.9. **Bemerkung.** Der Residuensatz gilt auch noch, wenn f in D unendlich viele isolierte Singularitäten hat: Sei $H : [0,1]\times[a,b] \to D$ eine Homotopie von geschlossenen Wegen, die γ zu einem Punkt zusammenzieht. Dann ist das Bild von H eine kompakte Teilmenge von D, und wir können D ersetzen durch eine Umgebung D' des Bildes von H, deren Abschluss kompakt ist und ebenfalls in D enthalten ist. Die Menge der isolierten Singularitäten von f ist diskret (nach Definition hat jede eine Umgebung, in der keine andere enthalten ist), also liegen nur endlich viele davon im kompakten Abschluss von D'. Nach Konstruktion ist γ auch in D' nullhomotop. Damit können wir den Residuensatz auf D' anwenden. Beachte auch, dass für jedes $z \notin D'$ die Umlaufzahl $I(\gamma, z) = 0$ ist.

1.10. **Beispiel.** Wir berechnen

$$\int\limits_{|z|=3\pi/2} \frac{dz}{\sin z}\,.$$

Der Integrand $1/\sin z$ hat Singularitäten für $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Der Nenner hat jeweils eine einfache Nullstelle, also ist

$$\operatorname{Res}_{z=k\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k\,.$$

Drei der Singularitäten liegen im Inneren des Kreises $|z| = \frac{3\pi}{2}$, nämlich $z = -\pi, 0, \pi$ (jeweils mit Umlaufzahl 1). Aus dem Residuensatz erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\int\limits_{|z|=3\pi/2} \frac{dz}{\sin z} &= 2\pi i\Big(\operatorname{Res}_{z=-\pi} \frac{1}{\sin z} + \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z} + \operatorname{Res}_{z=\pi} \frac{1}{\sin z}\Big) \\ &= 2\pi i(-1+1-1) = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

2. Anwendungen des Residuensatzes

Der Residuensatz ist sehr wichtig (auch im Hinblick auf die Staatsexamensklausur), weil er viele Anwendungen bei der Berechnung von bestimmten (auch reellen) Integralen und Werten von unendlichen Reihen hat.

2.1. **Anwendung 1.** Sei R eine rationale Funktion in zwei Variablen, so dass $R(x,y)$ für alle x, y mit $x^2 + y^2 = 1$ definiert ist. Wir berechnen das Integral

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt\,.$$

Dazu beachten wir, dass mit $\zeta = e^{it}$ gilt

$$\cos t = \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i}\,.$$

Außerdem ist $dt = -i\zeta^{-1}\, d\zeta$, so dass wir umformen können:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = -i \int\limits_{|\zeta|=1} R\Big(\frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i}, \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2}\Big)\frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Sei

$$f(z) = z^{-1} R\Big(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\Big)\,,$$

dann folgt aus dem Residuensatz

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{Res}_z f\,,$$

wobei die Summe über die Pole von f im Inneren des Einheitskreises zu erstrecken ist.

2.2. **Beispiel.** Um

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt$$

zu berechnen, bestimmen wir

$$f(z) = z^{-1} \frac{1}{\frac{1}{2}\big(4 + z + z^{-1}\big)} = \frac{2}{z^2 + 4z + 1}\,.$$

Der Nenner hat (einfache) Nullstellen bei $z = -2 \pm \sqrt{3}$. Davon liegt $z = -2 + \sqrt{3}$ im Einheitskreis. Das Residuum ergibt sich zu

$$\operatorname{Res}_{-2+\sqrt{3}} f = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Insgesamt haben wir dann also

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\,.$$

2.3. **Beispiel.** Für

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\, dt$$

haben wir

$$f(z) = z^{-1} \Big(\frac{1}{\frac{1}{2}\big(4 + z + z^{-1}\big)}\Big)^2 = \frac{4z}{(z^2 + 4z + 1)^2}\,.$$

Bei $z = -2 + \sqrt{3}$ haben wir jetzt einen Pol zweiter Ordnung; wir müssen also die kompliziertere Formel aus Lemma 1.3, (3), verwenden. Es ist

$$f(z) = \frac{4z}{(z + 2 + \sqrt{3})^2 (z + 2 - \sqrt{3})^2}\,,$$

also

$$g(z) = (z + 2 - \sqrt{3})^2 f(z) = \frac{4z}{(z + 2 + \sqrt{3})^2}\,,$$

und

$$\operatorname{Res}_{-2+\sqrt{3}} f = g'(-2+\sqrt{3}) = \frac{4(z + 2 + \sqrt{3} - 2z)}{(z + 2 + \sqrt{3})^3}\Big|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{16}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\,.$$

Es ergibt sich also

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos t)^2}\, dt = \frac{4\pi}{9}\sqrt{3}\,.$$

2.4. **Anwendung 2.** Sei f eine rationale Funktion, also $f(z) = p(z)/q(z)$ mit Polynomen p und q, so dass $\deg q \geq \deg p + 2$ und q keine reellen Nullstellen hat. Dann konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$$

(absolut), und wir können es mit dem Residuensatz berechnen. Dazu sei $r > 0$ so groß, dass alle Pole von f (Nullstellen von q) Betrag $< r$ haben. Wir betrachten den Weg γ_r, der aus dem reellen Intervall $[-r, r]$ und dem Halbkreis mit Radius r in der oberen Halbebene besteht. Wir bezeichnen die beiden Teile von γ_r mit $\gamma_{r,1}$ und $\gamma_{r,2}$. Dann gilt

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_z f = \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(t)\,dt + \int_{\gamma_{r,2}} f(z)\,dz\,.$$

Wir lassen jetzt r groß werden. Da $\deg q \geq \deg p + 2$, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $|f(z)| \leq C|z|^{-2}$ für $|z|$ hinreichend groß. Dann folgt

$$\Bigl|\int_{\gamma_{r,2}} f(z)\,dz\Bigr| \leq \pi r \cdot C r^{-2} = \pi C r^{-1}\,,$$

dieser Beitrag konvergiert also für $r \to \infty$ gegen null. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt &= \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(t)\,dt \\
&= \lim_{r\to\infty} \Bigl(\int_{\gamma_r} f(z)\,dz - \int_{\gamma_{r,2}} f(z)\,dz\Bigr) \\
&= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_z f - \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_{r,2}} f(z)\,dz \\
&= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_z f\,.
\end{aligned}$$

2.5. **Beispiel.** Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

Die Funktion $f(z) = 1/(1+z^2)$ hat einfache Pole bei $z = \pm i$; der Pol bei $z = i$ ist in der oberen Halbebene. Das Residuum ist

$$\operatorname{Res}_i f = \frac{1}{2i}\,.$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi\,.$$

2.6. **Beispiel.** Wir berechnen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}\,.$$

Wir haben immer noch nur den einen Pol $z = i$ in der oberen Halbebene, aber jetzt ist es ein Pol der Ordnung 2. Wir setzen

$$g(z) = (z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z+i)^2}$$

und finden

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^2} = g'(i) = -\frac{2}{(i+i)^3} = \frac{1}{4i}\,.$$

Es folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}\,.$$

2.7. **Bemerkung.** Die Funktion f braucht nicht unbedingt rational zu sein. Aus dem Beweis ergibt sich, dass folgende Anforderungen ausreichen:

(1) f ist definiert und holomorph auf einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\bar{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$, mit isolierten Singularitäten, die nicht in $\mathbb{R}$ liegen;
(2) es gibt eine Folge (r_ν) mit $r_\nu \to \infty$, so dass keine Singularität von f in $\bar{H}$ Betrag r_ν hat, und so dass $|f(z)| \leq c r_\nu^{-1-\varepsilon}$ für $z \in \bar{H}$ mit $|z| = r_\nu$, wobei $c, \varepsilon > 0$ von ν unabhängig sind.

Man beachte, dass f hier durchaus unendlich viele isolierte Singularitäten in der oberen Halbebene haben kann. Der Beweis zeigt, dass die dann unendliche Summe von Residuen konvergiert.

Man kann z.B. $\sqrt{z+i}$ für $\operatorname{Im} z > -1$ definieren als den Zweig, der bei $z = 0$ den Wert $e^{\pi i/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ hat. Dann erfüllt $f(z) = \sqrt{z+i}/(1+z^2)$ die Voraussetzungen, und man kann das entsprechende Integral berechnen.

2.8. **Anwendung 3.** Bemerkung 2.7 zieht zum Beispiel, wenn f rational ist, so dass der Nenner Grad mindestens um zwei größer als der Nenner hat und der Nenner keine reellen Nullstellen besitzt, und wir $f(z)e^{iz}$ betrachten (denn $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} \leq 1$ für $z \in \bar{H}$). Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta)e^{i\zeta}\,.$$

Wir wollen jetzt zeigen, dass das auch noch stimmt, wenn der Grad des Nenners nur um eins größer ist als der des Zählers. In diesem Fall konvergiert das Integral nicht mehr absolut; es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = \lim_{r,s\to\infty} \int_{-r}^{s} f(x)e^{ix}\,dx$$

als uneigentliches Integral zu verstehen.

Um die Behauptung zu beweisen, wählen wir $r, s, t > 0$ und setzen $\gamma_1 = [s, s+it]$, $\gamma_2 = [s+it, -r+it]$, $\gamma_3 = [-r+it, -r]$ und $\gamma_4 = [-r, s]$. Wir können r, s, t so groß wählen, dass alle Singularitäten von f in der oberen Halbebene in dem von γ_1 bis γ_4 umrandeten Rechteck liegen. Dann gilt nach dem Residuensatz:

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta)e^{i\zeta} = \Big(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}\Big) f(\zeta)e^{i\zeta}\, d\zeta + \int_{-r}^{s} f(x)e^{ix}\, dx\,.$$

Wir müssen die Integrale über γ_1, γ_2 und γ_3 abschätzen. Aus der Grad-Bedingung und der Lage der Pole folgt $|f(z)| \le c/|z|$ für ein festes c, wenn z auf einem der γ_j liegt. Wir beginnen mit γ_2:

$$\Big|\int_{\gamma_2} f(\zeta)e^{i\zeta}\, d\zeta\Big| \le (r+s) \max_{-r\le u\le s} |f(u+it)|e^{-t} \le (r+s)\frac{c}{t}e^{-t}\,.$$

Wir sehen $\int_{\gamma_2} \to 0$ für $t \to \infty$. Für γ_1 haben wir

$$\Big|\int_{\gamma_1} f(\zeta)e^{i\zeta}\, d\zeta\Big| \le \max_{0\le u\le t} |f(s+iu)| \int_0^t |e^{is-u}|\, du \le \frac{c}{s}\int_0^t e^{-u}\, du \le \frac{c}{s}$$

und entsprechend

$$\Big|\int_{\gamma_3} f(\zeta)e^{i\zeta}\, d\zeta\Big| \le \frac{c}{r}\,.$$

Mit $t \to \infty$ folgt

$$\Big|\int_{-r}^{s} f(x)e^{ix}\, dx - 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta)e^{i\zeta}\Big| \le \frac{c}{r} + \frac{c}{s}$$

und daraus, dass das uneigentliche Integral existiert und gleich der Summe der Residuen (mal $2\pi i$) ist.

2.9. **Bemerkung.** Wie vorher kann man die Aussage erweitern auf Funktionen f die in einer offenen Umgebung von $\bar{H}$ holomorph sind bis auf endlich viele Singularitäten, sie nicht auf $\mathbb{R}$ liegen, so dass $f(z) \to 0$ gilt für $z \to \infty$ in $\bar{H}$. (Hier kann man nicht unendlich viele Singularitäten zulassen, denn r, s, t müssen kontinuierlich nach ∞ gehen können, ohne immer wieder an Singularitäten „hängen zu bleiben".)

2.10. **Beispiel.** Wir berechnen

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\, dx \qquad \text{für } a > 0.$$

Hier muss man das Integral noch ein wenig bearbeiten, um es in die richtige Form zu bringen:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}\, dx$$

(beachte, dass der Integrand gerade ist). Die Voraussetzungen sind dann erfüllt, also gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} \frac{e^{i\zeta}}{a^2+\zeta^2}$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}_{\zeta=ia} \frac{e^{i\zeta}}{a^2+\zeta^2} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-a}\,.$$

Damit ist

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}\,.$$

2.11. **Beispiel.** Analog gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix}\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta) e^{-i\zeta}\,,$$

wenn $f(-z)$ die Voraussetzungen von Bemerkung 2.9 erfüllt. Man beachte das Minuszeichen, das durch die entgegengesetzte Umlaufrichtung um das Rechteck bedingt ist! Ist f etwa rational, so kann man durch eine geeignete Kombination beider Formeln auch dann Integrale wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x\,dx \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x\,dx$$

berechnen, wenn $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ nicht nur reelle Werte annimmt (wie es im vorangegangenen Beispiel der Fall war).

Es ist etwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x+i}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x+i}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i}\,dx$$
$$= \pi i \Big(\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta+i} - \sum_{\operatorname{Im} z<0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta+i} \Big)$$
$$= \pi i \Big(-\operatorname{Res}_{\zeta=-i} \frac{e^{-i\zeta}}{\zeta+i} \Big) = -\frac{\pi i}{e}\,.$$

2.12. **Erweiterung von Anwendung 3.** Mit den bisherigen Methoden können wir zum Beispiel nicht das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

berechnen, da die Funktion $z \mapsto e^{iz}/z$ bei $z = 0$ einen Pol hat. Dabei ist die Funktion $(\sin z)/z$ bei $z = 0$ völlig harmlos (hebbare Singularität). Wir können das Problem umgehen, indem wir folgenden Grenzwert betrachten:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx \Big)$$

Ein solcher Grenzwert heißt auch *Cauchyscher Hauptwert* des Integrals und wird häufig als

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

(in unserem Beispiel) geschrieben. Er existiert zum Beispiel, wenn die Funktion für $|x| \to \infty$ schnell genug abfällt und nur endlich viele einfache Pole auf der reellen Achse hat.

Zur Berechnung mit dem Residuensatz ersetzen wir das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ durch einen in der oberen Halbebene liegenden Halbkreis γ_ε mit Radius $\varepsilon > 0$ (wobei ε so klein ist, dass dieser Halbkreis außer 0 keine weiteren Singularitäten des Integranden enthält). Dann gilt wie vorher:

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta} - \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\,.$$

Um den Grenzwert zu bestimmen, müssen wir

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\,d\zeta$$

berechnen. Dazu beachten wir wieder, dass sich allgemein eine holomorphe Funktion f in der Nähe einer isolierten Singularität z_0 schreiben lässt als $f(z) = F'(z) + \frac{\operatorname{Res}_{z_0} f}{z-z_0}$, vergleiche den Beweis von Lemma 1.8. Wenn f bei z_0 nur einen einfachen Pol hat, ist F holomorph auch in z_0. Es folgt mit $\gamma_\varepsilon : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto z_0 + \varepsilon e^{i(\pi-t)}$:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta &= F(z_0+\varepsilon) - F(z_0-\varepsilon) + (\operatorname{Res}_{z_0} f) \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z_0} \\ &= F(z_0+\varepsilon) - F(z_0-\varepsilon) - \pi i \operatorname{Res}_{z_0} f\,.\end{aligned}$$

Da F stetig in z_0 ist, ist der Grenzwert einfach $-\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f$.

Für unser Beispiel ergibt sich

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i$$

(das Residuum bei 0 ist 1, und andere Singularitäten gibt es nicht). Wegen

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

erhalten wir schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi\,.$$

Der selbe Trick lässt sich anwenden auf Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix}\,dx\,,$$

wenn f die Voraussetzungen von Bemerkung 2.9 erfüllt, abgesehen von endlich vielen einfachen Polen auf der reellen Achse. Dann gilt

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta)e^{i\zeta} + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z=0} \operatorname{Res}_{\zeta=z} f(\zeta)e^{i\zeta}\,.$$

Die entsprechende Aussage gilt für Integrale

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

mit f wie in Bemerkung 2.7.

2.13. **Anwendung 4.** Man kann auch einseitig unendliche Integrale der Form

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

unter geeigneten Voraussetzungen berechnen. Dafür verwendet man einen Integrationsweg um einen „geschlitzten Kreisring“ herum: Wir wählen $0 < r < R$ und $\varepsilon > 0$ und setzen $\gamma_1 = [r + i\varepsilon, R + i\varepsilon]$, $\gamma_3 = [R - i\varepsilon, r - i\varepsilon]$; γ_2 ist das entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufene Stück des Kreises vom Radius $\sqrt{R^2 + \varepsilon^2}$ um 0, das $R + i\varepsilon$ mit $R - i\varepsilon$ verbindet, und γ_4 ist das im Uhrzeigersinn durchlaufene Stück des Kreises vom Radius $\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}$ um 0, das $r - i\varepsilon$ mit $r + i\varepsilon$ verbindet.

Damit das funktioniert, brauchen wir eine Funktion f mit der Eigenschaft, dass $\lim_{\varepsilon\searrow 0} f(x+i\varepsilon)$ von $\lim_{\varepsilon\searrow 0} f(x-i\varepsilon)$ verschieden ist (sonst heben sich die Integrale entlang von γ_1 und γ_3 im Limes gegenseitig weg).

2.14. **Anwendung 4, Erster Fall.** Hier betrachten wir Integrale der Form

$$\int_{0}^{\infty} x^\alpha f(x)\,dx$$

mit $f(x)$ rational, $\deg f \le -2$, f ohne Pole auf $\mathbb{R}_{>0}$ und mit höchstens einem einfachen Pol bei 0; außerdem sei $0 < \alpha < 1$. Dann konvergiert das Integral absolut.

Hier und im Folgenden sei $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}$ der Zweig des Logarithmus mit $\operatorname{Im} \operatorname{Log} z \in\,]0, 2\pi[$. Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \operatorname{Log}(x + i\varepsilon) = \log x \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0} \operatorname{Log}(x - i\varepsilon) = \log x + 2\pi i\,.$$

Wir definieren $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}$ (für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$). Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}(x + i\varepsilon)^\alpha = x^\alpha \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon\searrow 0}(x - i\varepsilon)^\alpha = e^{2\pi i\alpha}x^\alpha$$

und daher

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Big(\int_{\gamma_1} \zeta^\alpha f(\zeta)\,d\zeta + \int_{\gamma_3} \zeta^\alpha f(\zeta)\,d\zeta\Big) = \big(1 - e^{2\pi i\alpha}\big)\int_{r}^{R} x^\alpha f(x)\,dx\,.$$

Nach dem Residuensatz ist, wenn r und R so gewählt sind, dass alle Singularitäten von f (außer evtl. $z = 0$) vom Integrationsweg eingeschlossen sind,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Bigl(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \Bigr) \zeta^\alpha f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{z \ngeq 0} \operatorname{Res}_{\zeta = z} \zeta^\alpha f(\zeta)\,.$$

Wir müssen noch die Integrale über γ_2 und γ_4 abschätzen. Zunächst gilt

$$|z^\alpha| = |e^{\alpha \operatorname{Log} z}| = e^{\alpha \operatorname{Re} \operatorname{Log} z} = e^{\alpha \log |z|} = |z|^\alpha\,.$$

Außerdem ist $|f(z)| \le c|z|^{-1}$ für $|z| \to 0$ und $|f(z)| \le C|z|^{-2}$ für $|z| \to \infty$. Damit folgt

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Bigl| \int_{\gamma_2} \zeta^\alpha f(\zeta)\, d\zeta \Bigr| \le \lim_{R \to \infty} 2\pi R \frac{C R^\alpha}{R^2} = 2\pi C \lim_{R \to \infty} R^{\alpha - 1} = 0$$

und ebenso

$$\lim_{r \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Bigl| \int_{\gamma_4} \zeta^\alpha f(\zeta)\, d\zeta \Bigr| \le \lim_{r \searrow 0} 2\pi r \frac{c r^\alpha}{r} = 2\pi c \lim_{r \searrow 0} r^\alpha = 0\,.$$

Alles zusammen bedeutet

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{z \ngeq 0} \operatorname{Res}_{\zeta = z} \zeta^\alpha f(\zeta)\,.$$

2.15. **Beispiel.** Wir berechnen

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2 + 1}\, dx \qquad \text{für } 0 < \alpha < 1.$$

Unsere Funktion $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ hat Singularitäten bei $z = \pm i$. Die Residuen sind

$$\frac{(\pm i)^\alpha}{\pm 2i} = \frac{e^{\alpha \pi i (1 \mp 1/2)}}{\pm 2i}\,,$$

also ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2 + 1}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \frac{e^{\pi i \alpha/2}}{2i} \bigl(1 - e^{\pi i \alpha}\bigr) = \pi \frac{e^{\pi i \alpha/2}}{e^{\pi i \alpha} + 1} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi \alpha}{2}}\,.$$

2.16. **Anwendung 4, Zweiter Fall.** Wie sieht es mit Integralen

$$\int_0^\infty f(x)\, dx$$

aus, wenn f eine rationale Funktion ohne Pole auf $\mathbb{R}_{\ge 0}$ und mit $\deg f \le -2$ ist? Auf den ersten Blick scheint unser Trick nicht zu funktionieren, weil f keine unterschiedlichen Grenzwerte hat, wenn man sich von oben bzw. unten der reellen Achse nähert. Statt dessen betrachten wir $f(z) \operatorname{Log} z$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x + i\varepsilon) \operatorname{Log}(x + i\varepsilon) = f(x) \log x \quad \text{und} \\ &\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x - i\varepsilon) \operatorname{Log}(x - i\varepsilon) = f(x)(\log x + 2\pi i)\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\Big(\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_3}\Big) f(\zeta)\,\mathrm{Log}\,\zeta\,d\zeta = -2\pi i\int\limits_r^R f(x)\,dx\,.$$

Unter Beachtung von $\lim_{r\searrow 0} r\log r = 0$ und $\lim_{R\to\infty}\frac{\log R}{R} = 0$ erhalten wir dann wie eben:

$$\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = -\sum_{z\not\geq 0}\mathrm{Res}_{\zeta=z} f(\zeta)\,\mathrm{Log}\,\zeta\,.$$

2.17. **Beispiel.** Wir berechnen

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}\,.$$

Die Singularitäten sind einfache Pole bei $z = -1$, $z = e^{\pi i/3}$ und $z = e^{5\pi i/3}$. Die Residuen von $F(z) = (\mathrm{Log}\,z)/(z^3+1)$ sind

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{-1} F &= \frac{\mathrm{Log}(-1)}{3} = \frac{\pi i}{3}\,,\\
\mathrm{Res}_{e^{\pi i/3}} F &= \frac{\mathrm{Log}\,e^{\pi i/3}}{3e^{2\pi i/3}} = \frac{\pi i}{9}e^{-2\pi i/3} = \frac{\pi i}{9}\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und}\\
\mathrm{Res}_{e^{5\pi i/3}} F &= \frac{\mathrm{Log}\,e^{5\pi i/3}}{3e^{10\pi i/3}} = \frac{5\pi i}{9}e^{2\pi i/3} = \frac{5\pi i}{9}\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Ihre Summe ist

$$\frac{\pi i}{9}\Big(3 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2} + 5i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}\,,$$

also ist

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\,.$$

2.18. **Erweiterung.** Die Methode funktioniert auch noch für

$$\int\limits_0^\infty P(\log x)f(x)\,dx$$

mit f wie oben, wobei P ein Polynom ist. Dazu findet man ein Polynom Q mit der Eigenschaft $Q(X) - Q(X+2\pi i) = 2\pi i P(X)$ (es gibt stets so ein Q mit $\deg Q = \deg P + 1$). Dann gilt analog

$$\int\limits_0^\infty P(\log x)f(x)\,dx = \sum_{z\not\geq 0}\mathrm{Res}_{\zeta=z}\,Q(\mathrm{Log}\,\zeta)f(\zeta)\,.$$

Oben ist $P(X) = 1$; man kann dann $Q(X) = -X$ nehmen.

2.19. **Anwendung 5.** Man kann den Residuensatz auch verwenden, um unendliche Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(n)$$

auszuwerten, wobei R eine gerade rationale Funktion ist mit $\deg R \leq -2$ und ohne Pole in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Als Beispiel beweisen wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Die Idee ist, die Funktion $f(z) = R(z)h(z)$ geeignet zu integrieren, wo h holomorph ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ mit einfachen Polen in $\mathbb{Z}$ vom Residuum 1. Eine solche Funktion ist

$$h(z) = \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}\,.$$

Der Nenner $\sin \pi z$ verschwindet genau für $z \in \mathbb{Z}$, und das Residuum ist

$$\operatorname{Res}_{z=n} \pi \cot \pi z = \frac{\pi \cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = 1\,.$$

Außerdem haben wir folgende Abschätzung:

2.20. **Lemma.** *Sei $\delta > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C = C_\delta$, so dass*

$$\bigl|\pi \cot \pi z\bigr| \leq C_\delta$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{dist}(z, \mathbb{Z}) = \min\{|z-n| : n \in \mathbb{Z}\} \geq \delta$.

Beweis. Sei zunächst $z = x + iy$ mit $\operatorname{Im} z = y \geq 1$. Dann ist

$$\bigl|\pi \cot \pi z\bigr| = \pi \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| = \pi \left|\frac{e^{2\pi i x} e^{-2\pi y} + 1}{e^{2\pi i x} e^{-2\pi y} - 1}\right| \leq \pi \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \pi \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} =: C_0\,.$$

Wegen $\pi \cot(-\pi z) = -\pi \cot \pi z$ gilt die selbe Abschätzung auch für $y \leq -1$.

Die Menge $K_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq \frac{1}{2}, |\operatorname{Im} z| \leq 1, |z| \geq \delta\}$ ist kompakt und $\pi \cot \pi z$ ist stetig auf K_δ, also gibt es $C_\delta \geq C_0$ mit $|\pi \cot \pi z| \leq C_\delta$ für $z \in K_\delta$. Wegen $\pi \cot \pi(z+1) = \pi \cot \pi z$ gilt diese Abschätzung auch für

$$z \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (K_\delta + n) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq 1, \operatorname{dist}(z, \mathbb{Z}) \geq \delta\}\,.$$

Insgesamt folgt die Behauptung. $\square$

Wir betrachten jetzt also die Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{z^2} \cot \pi z\,.$$

Dann ist f überall holomorph bis auf $z \in \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ haben wir bei $z = n$ einen einfachen Pol mit Residuum

$$\operatorname{Res}_n f = \frac{1}{n^2} \operatorname{Res}_{z=n} \pi \cot \pi z = \frac{1}{n^2}\,.$$

Für $z = 0$ haben wir einen Pol dritter Ordnung. Das Residuum ergibt sich dann als

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_0 f &= \frac{1}{2!}\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^2 z\pi \cot \pi z\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^2 \frac{1 - \frac{\pi^2}{2} z^2 + \cdots}{1 - \frac{\pi^2}{6} z^2 + \cdots}\Big|_{z=0} \\
&= \frac{1}{2}\Bigl(\frac{d}{dz}\Bigr)^2 \Bigl(1 - \frac{\pi^2}{3} z^2 + \cdots\Bigr)\Big|_{z=0} = -\frac{\pi^2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Für $n \geq 0$ sei jetzt γ_n der positiv orientierte Rand des Rechtecks mit den Eckpunkten $\left(n+\frac{1}{2}\right)(\pm 1 \pm i)$. Auf γ_n liegen keine Singularitäten von f, und $\operatorname{dist}(|\gamma_n|, \mathbb{Z}) = \frac{1}{2}$. Nach Lemma 2.20 gibt es also eine Konstante C mit $|\pi \cot \pi z| \leq C$ auf $|\gamma_n|$, unabhängig von n. Es folgt, dass auf $|\gamma_n|$ gilt

$$|f(z)| \leq C \max\{|z^{-2}| : z \in |\gamma_n|\} = \frac{C}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\,.$$

Für das Integral erhalten wir die Abschätzung

$$\Bigl|\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta\Bigr| \leq (8n+4)\frac{C}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{16C}{2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Auf der anderen Seite gilt nach dem Residuensatz:

$$\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}_k f = 2\pi i\Bigl(-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\Bigr)\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \Bigl(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma_n} f(\zeta)\,d\zeta\Bigr) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Ganz analog erhält man allgemein das folgende Resultat.

2.21. **Satz.** *Sei R eine gerade rationale Funktion mit $\deg R \leq -2$ und ohne Pole in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Dann ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} R(n) = -\frac{1}{2}\Bigl(\operatorname{Res}_0 f + \sum_{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}} \operatorname{Res}_z f\Bigr)$$

mit $f(z) = R(z) \cdot \pi \cot \pi z$.

In der Summe auf der rechten Seite treten dabei nur die endlich vielen Pole $\neq 0$ von R auf. In unserem Beispiel ist die Summe leer, und es bleibt nur das Residuum bei 0.

3. Das Null- und Polstellen zählende Integral

Eine wichtige Anwendung des Residuensatzes innerhalb der Funktionentheorie ist das Zählen von Null- und/oder Polstellen (oder allgemeiner w-Stellen) einer meromorphen Funktion.

3.1. **Definition.** Eine Funktion f heißt *meromorph* auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, wenn sie auf D holomorph ist bis auf isolierte Singularitäten, die Pole sind. (f darf also keine wesentlichen Singularitäten haben.)

Wir brauchen die logarithmische Ableitung:

3.2. **Definition.** Sei f holomorph und nicht konstant 0. Dann heißt die Funktion f'/f die *logarithmische Ableitung* von f.

Aus der Produktformel für die Ableitung folgt

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\,.$$

Der Name kommt daher, dass formal gilt $\frac{d}{dz} \log f(z) = f'(z)/f(z)$.

Die für uns wichtigste Eigenschaft der logarithmischen Ableitung ist wie folgt:

3.3. **Lemma.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, und sei f holomorph in einer punktierten Umgebung von z_0, so dass z_0 keine wesentliche Singularität von f ist. Sei außerdem f nicht die Nullfunktion. Dann ist f'/f holomorph in einer (evtl. kleineren) punktierten Umgebung von z_0 mit höchstens einem einfachen Pol bei z_0, und es gilt*

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } f \textit{ in } z_0 \textit{ definiert ist und } f(z_0) \neq 0, \\ k & \textit{falls } f \textit{ in } z_0 \textit{ eine } k\textit{-fache Nullstelle hat,} \\ -k & \textit{falls } f \textit{ in } z_0 \textit{ einen } k\textit{-fachen Pol hat.} \end{cases}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass f in z_0 definiert (und damit auch holomorph) ist. Da f nicht die Nullfunktion ist, gibt es $k \geq 0$ und g holomorph bei z_0 mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)\,.$$

Es gibt eine punktierte Umgebung von z_0, auf der f nicht verschwindet; dort ist f'/f holomorph, und es gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,.$$

Wegen $g(z_0) \neq 0$ ist der zweite Summand holomorph in z_0. Der erste Summand hat einen einfachen Pol mit Residuum k, falls $k > 0$ ist. Wenn $k = 0$ ist, ist der erste Summand nicht vorhanden, und f'/f ist holomorph bei z_0.

Wenn f in z_0 einen Pol der Ordnung k hat, dann gilt analog

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z)$$

mit g holomorph bei z_0 und $g(z_0) \neq 0$, und die selbe Überlegung wie eben zeigt, dass f'/f bei z_0 einen einfachen Pol mit Residuum $-k$ hat. □

Wir führen eine Schreibweise für die Vielfachheit einer Null- oder Polstelle ein.

3.4. **Definition.** Sei f in einer punktierten Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph und nicht die Nullfunktion. Wir schreiben

$$\operatorname{ord}_{z_0} f = \operatorname{ord}_{z=z_0} f(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f \text{ in } z_0 \text{ definiert und } f(z_0) \neq 0, \\ k & \text{falls } f \text{ in } z_0 \text{ eine } k\text{-fache Nullstelle hat,} \\ -k & \text{falls } f \text{ in } z_0 \text{ einen } k\text{-fachen Pol hat.} \end{cases}$$

Ist z_0 eine wesentliche Singularität von f, so ist $\operatorname{ord}_{z_0} f$ nicht definiert.

Lemma 3.3 sagt dann

$$\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \operatorname{ord}_{z_0} f\,,$$

wenn f in z_0 höchstens einen Pol hat.

Anwendung des Residuensatzes liefert jetzt:

3.5. **Satz.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f meromorph auf D, und γ ein in D nullhomotoper geschlossener Weg, so dass keine Null- oder Polstelle von f auf $|\gamma|$ liegt. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{z \in D} I(\gamma, z) \operatorname{ord}_z f\,.$$

Dabei ist die Summe auf der rechten Seite endlich, weil nur endlich viele Null- und Polstellen von f im „Inneren“ von γ (also dort, wo $I(\gamma, z) \neq 0$ ist) liegen.

Ist γ der positive orientierte Rand eines in D kompakt enthaltenen Gebiets G (etwa einer offenen Kreisscheibe oder eines Rechtecks), dann sagt der Satz, dass das Integral (bis auf den unvermeidlichen Faktor $2\pi i$) gleich der Anzahl der Nullstellen minus der Anzahl der Polstellen von f in G ist, wobei die Null- und Polstellen mit Vielfachheit gezählt werden.

Wir könne Satz 3.5 benutzen, um (wieder einmal) den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen.

3.6. **Fundamentalsatz der Algebra.** *Sei $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat f in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt).*

Beweis. Wir betrachten die logarithmische Ableitung von f:

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{nz^{n-1} + (n-1)a_{n-1}z^{n-2} + \dots}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots} \\
&= \frac{n}{z}\,\frac{1 + (n-1)a_{n-1}z^{-1} + \dots}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots} \\
&= \frac{n}{z} + \frac{n\big((n-2)a_{n-1} + (n-3)a_{n-2}z^{-1} + \dots\big)}{z^2\big(1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots\big)}
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{n}{z}\right| \leq \frac{C}{|z|^2}$$

für $|z|$ hinreichend groß. Es folgt für die Anzahl $N(f)$ der Nullstellen von f:

$$N(f) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \lim_{R\to\infty} \frac{n}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{d\zeta}{\zeta} + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \Big(\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{n}{\zeta}\Big)\, d\zeta\,.$$

Das erste Integral hat den Wert $2\pi i$, das zweite können wir abschätzen, wenn R groß ist:

$$\Big|\int_{|\zeta|=R} \Big(\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{n}{\zeta}\Big)\, d\zeta\Big| \leq 2\pi R \frac{C}{R^2} = \frac{2\pi C}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Es folgt $N(f) = n$. ∎

Satz 3.5 ist auch als das „Prinzip vom Argument“ bekannt. Man kann nämlich wie folgt umformen (dabei sei $\gamma : [a,b] \to D$):

$$\sum_{z\in D} I(\gamma,z)\operatorname{ord}_z f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'\big(\gamma(t)\big)}{f\big(\gamma(t)\big)}\gamma'(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{d\zeta}{\zeta} = I(f\circ\gamma,0)\,.$$

Die Anzahl der Nullstellen minus die Anzahl der Polstellen von f im Inneren von γ (mit Vielfachheit und Umlaufzahl gezählt) ist also gleich der Umlaufzahl von $f\circ\gamma$ um 0. Diese wiederum ist das selbe wie $1/(2\pi)$ mal die Gesamtänderung des Arguments von $f(z)$ (also des Winkels von der reellen Achse zu $f(z)$), wenn z den Weg γ durchläuft.

3.7. **Beispiel.** Im Staatsexamen 2004 kam folgende Aufgabe vor:

„Betrachten Sie die Funktion $f(z) = z^6 + 2z + 1$. Zeigen Sie, ohne die Nullstellen explizit zu berechnen, dass f im Quadranten $Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie zum Beweis die Änderung von $\arg f(z)$ längs der Kurve, die bei hinreichend großem R den Viertelkreis $\{z \in Q : |z| < R\}$ berandet.“

Sei also γ_R die Randkurve des Viertelkreises. Auf dem Weg von $z = 0$ nach $z = R$ ändert sich $f(z)$ auf der reellen Achse von $f(0) = 1$ zu $f(R) \approx R^6$ (wenn R groß ist). Auf dem Viertelkreis von $z = R$ nach $z = iR$ ist

$$f(z) = f(Re^{it}) = R^6e^{6it} + 2Re^{it} + 1 = R^6e^{6it}(1 + 2R^{-5}e^{-5it} + R^{-6}e^{-6it})\,;$$

das Argument ist also bis auf eine sehr kleine Abweichung durch $6t$ gegeben und ändert sich von 0 nach $6\cdot\pi/2 = 3\pi$ (plus ε). Auf dem letzten Teilstück von $z = iR$ nach $z = 0$ haben wir $f(it) = 1 - t^6 + 2it$; der Wert läuft also oberhalb der reellen Achse von $1 - R^6 + 2iR$ nach 1. Man sieht (Zeichnung machen!), dass $f\circ\gamma_R$ den Ursprung genau einmal in positiver Richtung umläuft. Nach dem Prinzip vom Argument folgt, dass f im Viertelkreis mit Radius R für hinreichend großes R genau eine Nullstelle hat. Damit hat f auch im positiven Quadranten genau eine Nullstelle.

Eine wichtige Anwendung ist der folgende *Satz von Rouché.*

3.8. **Satz von Rouché.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien f und g meromorph in G. Sei weiter γ ein in G nullhomotoper geschlossener Weg, auf dem keine Null- oder Polstellen von f oder g liegen. Wir setzen*

$$N(f) = \sum_{z\in G} I(\gamma,z)\operatorname{ord}_z f \quad \textit{und} \quad N(g) = \sum_{z\in G} I(\gamma,z)\operatorname{ord}_z g\,.$$

Gilt $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in |\gamma|$, dann ist $N(f) = N(g)$.

Der häufigste Anwendungsfall ist, wenn γ der positiv orientierte Rand eines in G kompakt enthaltenen Gebiets D ist. Dann ist $N(f)$ die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) minus die Anzahl der Polstellen (mit Vielfachheit) von f in D, und entsprechend für g.

Beweis. Wie wir schon gesehen haben, ist

$$N(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{und} \quad N(g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{g\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} \,.$$

Wir werden zeigen, dass die Wegen $f \circ \gamma$ und $g \circ \gamma$ als geschlossene Wege in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop sind. Daraus folgt dann, dass die beiden Integrale übereinstimmen.

Sei $\gamma : [a, b] \to G$. Wir definieren die „lineare Homotopie“

$$H : [0,1] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}\,, \qquad (s,t) \longmapsto (1-s) f\bigl(\gamma(t)\bigr) + s g\bigl(\gamma(t)\bigr)\,.$$

Es ist zu zeigen, dass H wohldefiniert ist, d.h., dass $H(s,t) \neq 0$ ist für alle $s \in [0,1]$, $t \in [a,b]$. Nun gilt aber für $z \in |\gamma|$

$$\begin{aligned} |(1-s)f(z) + sg(z)| &= \bigl|f(z) - s\bigl(f(z) - g(z)\bigr)\bigr| \geq |f(z)| - s|f(z) - g(z)| \\ &> |f(z)| - s|f(z)| = (1-s)|f(z)| \geq 0\,, \end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ verwendet haben. Das zeigt $|H(s,t)| > 0$, also $H(s,t) \neq 0$. Also ist H tatsächlich eine Homotopie in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (von geschlossenen Wegen, denn

$$H(s,0) = (1-s)f(\gamma(a)) + sg(\gamma(a)) = (1-s)f(\gamma(b)) + sg(\gamma(b)) = H(s,1)\,).$$

Es ist klar, dass $H(0,t) = (f \circ \gamma)(t)$ und $H(1,t) = (g \circ \gamma)(t)$; damit folgt

$$\int\limits_{f\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_{g\circ\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$$

und daraus die Behauptung. □

3.9. **Beispiel.** Eine Aufgabe aus dem Staatsexamen 2007:

„Es sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$z \cdot e^{a-z} = 1$$

im Einheitskreis $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ genau eine Lösung z_0 hat, und dass diese reell ist mit $0 < z_0 < 1$.“

Da es um Nullstellen im Einheitskreis geht, wählen wir γ als den positiv orientierten Rand von D. Wir sind interessiert an der Anzahl der Nullstellen der holomorphen Funktion $f = ze^{a-z} - 1$ in D. Um den Satz von Rouché anwenden zu können, brauchen wir eine zweite Funktion g, mit der wir f vergleichen können, und von der wir die Anzahl der Nullstellen in D kennen. Hier bietet es sich an, $g(z) = ze^{a-z}$ zu versuchen, denn offensichtlich hat g genau eine Nullstelle bei $z = 0$ und unterscheidet sich von f nur wenig. Für die Anwendung des Satzes müssen wir die Differenz $f - g$ auf $|\gamma|$ abschätzen. Im Beispiel gilt

$$|f(z) - g(z)| = 1 \quad \text{und} \quad |g(z)| = |z|e^{a-\operatorname{Re} z} = e^{a-\operatorname{Re} z} \geq e^{a-1} > 1\,,$$

denn $a > 1$. Damit ist $|f - g| < |g|$ auf $|\gamma|$, und wir können den Satz von Rouché anwenden (mit vertauschten Rollen von f und g). Der Satz zeigt, dass f und g gleich viele Nullstellen in D haben, also hat f ebenfalls genau eine Nullstelle $z_0 \in D$.

Die letzte Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz: Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = e^{a-1} - 1 > 0$, also gibt es eine reelle Nullstelle zwischen 0 und 1. Da es nur eine Nullstelle in D gibt, muss z_0 diese reelle Nullstelle sein.

Wir verallgemeinern den Begriff der „k-fachen Nullstelle“ ein wenig.

3.10. **Definition.** Sei f eine nicht-konstante bei $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Sei weiter $w \in \mathbb{C}$. Dann heißt z_0 eine *k-fache w-Stelle von f*, wenn gilt

$$\operatorname{ord}_{z=z_0}(f(z) - w) = k\,.$$

Es gilt dann also in einer Umgebung von z_0, dass $f(z) = w + g(z)$ ist mit einer holomorphen Funktion g, die in z_0 eine k-fache Nullstelle hat. Insbesondere gilt: Sei $w = f(z_0)$. Dann ist z_0 eine einfache w-Stelle von f genau dann, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.

Der Satz vom Nullstellen zählenden Integral gilt dann analog für w-Stellen, wenn man ihn auf $f(z) - w$ anwendet.

Wir erhalten noch folgende Beschreibung des lokalen Verhaltens einer holomorphen Funktion.

3.11. **Satz.** *Sei f in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, mit $f(z_0) = w_0$, und z_0 sei eine k-fache w_0-Stelle von f (dann ist $k \geq 1$). Dann gibt es Umgebungen V von z_0 und W von w_0, so dass es für jedes $w \in W \setminus \{w_0\}$ genau k verschiedene Punkte $z_1, \ldots, z_k \in V$ gibt mit $f(z_j) = w$; jeder dieser Punkte ist eine einfache w-Stelle von f.*

Beweis. Da f nicht konstant ist, gibt es eine Kreisscheibe V um z_0, so dass f auf $\bar{V}$ definiert ist, und so dass $f(z) \neq w_0$ und $f'(z) \neq 0$ ist für alle $z \in \bar{V} \setminus \{z_0\}$. Sei γ der positiv orientierte Rand von V und $m = \min_{z \in |\gamma|} |f(z) - w_0|$. Dann ist $m > 0$, und wir setzen $W = U_m(w_0)$. Sei nun $w \in W \setminus \{w_0\}$. Mit $g(z) = f(z) - w$ gilt dann

$$\Big|g(z) - \big(f(z) - w_0\big)\Big| = |w_0 - w| < m < |f(z) - w_0|$$

für alle $z \in |\gamma|$. Nach dem Satz von Rouché 3.8 hat g also in V genau so viele Nullstellen wie $f - w_0$, nämlich k (mit Vielfachheit gezählt). Wegen $w \neq w_0$ sind diese Nullstellen von z_0 verschieden; wegen $g'(z) = f'(z) \neq 0$ für $z \in V \setminus \{z_0\}$ sind es einfache Nullstellen. Damit hat g genau k verschiedene einfache Nullstellen $z_1, \ldots, z_k$ in V; dies sind genau die w-Stellen von f. □

Als Folgerung erhalten wir einen neuen Beweis des Satzes von der Gebietstreue:

3.12. **Folgerung.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant auf dem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{C}$ offen für jede offene Teilmenge $U \subset D$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $z_0 \in U$ das Bild $f(U)$ eine Umgebung von $w_0 = f(z_0)$ enthält. Das folgt aber unmittelbar aus Satz 3.11. □

Außerdem können wir sagen, wann f lokal bijektiv ist:

3.13. **Folgerung.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in D$. Es gibt genau dann Umgebungen U von z_0 in D und W von $w_0 = f(z_0)$, die von f bijektiv aufeinander abgebildet werden, wenn $f'(z_0) \neq 0$ ist.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $f'(z_0) \neq 0$ ist. Dann ist z_0 eine einfache w_0-Stelle von f, und Satz 3.11 gibt uns Umgebungen V von z_0 und W von w_0, so dass $W \subset f(V)$ und jedes $w \in W$ unter f genau ein Urbild in V hat. Mit $U = f^{-1}(W) \cap V$ ergibt sich die Behauptung: $f(U) = W$, also ist $f : U \to W$ surjektiv, und jedes $w \in W$ hat nur ein Urbild, also ist $f : U \to W$ injektiv.

Falls $f'(z_0) = 0$ ist, dann ist entweder f konstant, also sicher nicht lokal bijektiv, oder z_0 ist eine k-fache w_0-Stelle von f mit $k \geq 2$. Dann zeigt Satz 3.11 aber, dass f auf keiner noch so kleinen Umgebung von z_0 injektiv ist, also ist f ebenfalls nicht lokal bijektiv. □

3.14. **Folgerung.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{C}$ ebenfalls holomorph, d.h., f ist eine biholomorphe Abbildung $D \to f(D)$.*

$f : D_1 \to D_2$ ist eine *biholomorphe Abbildung*, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} holomorph sind.

Beweis. Nach Folgerung 3.13 ist $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Daraus folgt, dass f^{-1} in $w = f(z)$ komplex differenzierbar ist (mit $(f^{-1})'(w) = 1/f'(z)$). Also ist f^{-1} auf $f(D)$ holomorph. □

Wir können das lokale Verhalten in der Umgebung einer k-fachen w_0-Stelle noch etwas genauer beschreiben:

3.15. **Satz.** *Sei z_0 eine k-fache w_0-Stelle der holomorphen Funktion f. Dann gibt es Umgebungen U von z_0 und V von 0 und eine biholomorphe Abbildung $h : U \to V$ mit $h(z_0) = 0$, so dass auf U gilt*

$$f(z) = w_0 + h(z)^k .$$

Beweis. In einer Umgebung von z_0 gilt $f(z) = w_0 + (z - z_0)^k g(z)$ mit einer holomorphen Funktion g, so dass $g(0) \neq 0$. In einer eventuell kleineren Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ hat dann g keine Nullstelle, also existiert eine k-te Wurzel $\tilde{h}$ von g (d.h., $\tilde{h}^k = g$). Wir setzen $h(z) = (z - z_0)\tilde{h}(z)$, dann ist

$$f(z) = w_0 + h(z)^k , \quad h(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad h'(z_0) \neq 0 .$$

Nach Folgerung 3.13 gibt es Umgebungen U von z_0 und V von 0, so dass $h : U \to V$ biholomorph ist. □

Anschaulich besagt dieser Satz, dass sich f in der Umgebung einer k-fachen w_0-Stelle im wesentlichen wie $w_0 + (z - z_0)^k$ verhält.

4. Die Riemannsche Zahlenkugel

Die spezielle Behandlung von Polen ist manchmal etwas umständlich. Auf der anderen Seite hat eine meromorphe Funktion in der Nähe eines Pols ein sehr übersichtliches Verhalten: Die Funktionswerte streben gegen unendlich. Es liegt daher nahe, die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ zu „kompaktifizieren“, indem man einen Punkt „∞“ hinzufügt, den man dann als Grenzwert einer gegen unendlich divergierenden Folge oder als Wert einer meromorphen Funktion in einem Pol auffassen kann.

4.1. **Die vervollständigte Ebene.** Wir setzen zunächst als Menge (verschiedene Schreibweisen sind üblich)

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 = \bar{\mathbb{C}} = \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

und definieren die Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$ wie folgt:

Eine Teilmenge $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist *offen*, wenn entweder $U \subset \mathbb{C}$ offen ist, oder wenn $\infty \in U$ und $\hat{\mathbb{C}} \setminus U \subset \mathbb{C}$ kompakt ist.

(Es ist dann nicht schwer zu sehen, dass wir tatsächlich eine Topologie definiert haben, d.h. dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte von offenen Mengen wieder offen sind, und dass $\emptyset$ und $\hat{\mathbb{C}}$ offen sind.)

Eine Umgebungsbasis für den Punkt ∞ ist also etwa durch die Komplemente der abgeschlossenen Kreisscheiben $\bar{U}_r(0)$ mit $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben.

Wir zeigen erst einmal, dass wir die Ebene $\mathbb{C}$ auf diese Weise wirklich kompaktifiziert haben.

4.2. **Satz.** *$\hat{\mathbb{C}}$ ist hausdorffsch und kompakt.*

Beweis. Es ist klar, dass je zwei Punkte in $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ disjunkte Umgebungen haben. Um zu zeigen, dass $\hat{\mathbb{C}}$ hausdorffsch ist, genügt es also nachzuweisen, dass ∞ und $z \in \mathbb{C}$ disjunkte Umgebungen haben. Als solche kann man etwa $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{U}_1(z)$ und $U_1(z)$ wählen.

Sei nun $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $\hat{\mathbb{C}}$. Dann gibt es $i_0 \in I$, so dass $\infty \in U_{i_0}$. Da U_{i_0} in $\hat{\mathbb{C}}$ offen ist, ist das Komplement $\hat{\mathbb{C}} \setminus U_{i_0}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$. Es gibt also eine endliche Teilmenge $J \subset I$, so dass

$$\bigcup_{i\in J} U_i \supset \hat{\mathbb{C}} \setminus U_{i_0} .$$

Es folgt

$$\hat{\mathbb{C}} = \bigcup_{i\in J\cup\{i_0\}} U_i ,$$

also gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Damit ist gezeigt, dass $\hat{\mathbb{C}}$ kompakt ist. $\square$

4.3. **Stereographische Projektion.** Die Definition von $\hat{\mathbb{C}}$ scheint nahezulegen, dass der Punkt ∞ eine besondere Rolle spielt. Dies ist aber nicht so. Es gilt nämlich, dass $\hat{\mathbb{C}}$ homöomorph zur Kugeloberfläche S^2 ist (und auf S^2 sind alle Punkte „gleich“). Ein Homöomorphismus ist durch die *stereographische Projektion* gegeben. Dazu betten wir die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ in den $\mathbb{R}^3$ ein durch $x + iy \mapsto (x, y, 0)$; die S^2 ist die Oberfläche der Einheitskugel mit „Nordpol“ $N = (0, 0, 1)$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y, z) \longmapsto \frac{x + iy}{1 - z},$$

die durch Projektion von N weg gegeben ist, ein Homöomorphismus (die Inverse ist

$$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow S^2, \quad x + iy \longmapsto \frac{1}{1 + x^2 + y^2} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)),$$

der sich via $\varphi(N) = \infty$ zu einem Homöomorphismus zwischen S^2 und $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzt (Übung!).

Diese Tatsache erklärt den Namen *Riemannsche Zahlenkugel* (oder *Zahlensphäre*) für die vervollständigte Ebene $\hat{\mathbb{C}}$.

4.4. **Satz (Abbildungen nach $\hat{\mathbb{C}}$).** *Sei f meromorph auf $G \subset \mathbb{C}$. Dann lässt sich f zu einer stetigen Funktion $\tilde{f} : G \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen, indem man für jede Polstelle z_0 von f setzt $\tilde{f}(z_0) = \infty$.*

Beweis. Sei z_0 eine Polstelle von f und U eine Umgebung von z_0, so dass f auf $U \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Es genügt zu zeigen, dass $\tilde{f}$ in z_0 stetig ist. Wir wissen (siehe 0.1), dass $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$. Das bedeutet, dass es zu jedem $M > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $|f(z)| > M$ für alle $z \in U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Da die Mengen $\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \cup \{\infty\}$ eine Umgebungsbasis von ∞ bilden, ist das gerade die Definition der Stetigkeit von $\tilde{f}$ in z_0. $\square$

Das legt folgende Definition nahe.

4.5. **Definition.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \hat{\mathbb{C}}$ stetig. Dann heißt f *holomorph in $z_0 \in G$*, wenn es eine Umgebung U von z_0 gibt, so dass entweder

- $f(z_0) \neq \infty$, $f(U) \subset \mathbb{C}$ und f holomorph auf U, oder
- $f(z_0) = \infty$, $f(U) \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und $1/f$ holomorph auf U.

Dabei definieren wir $(1/f)(z) = 1/f(z)$ wenn $f(z) \neq 0, \infty$, $(1/f)(z) = 0$ für $f(z) = \infty$ (und $(1/f)(z) = \infty$ für $f(z) = 0$). f heißt *holomorph*, wenn f in allen Punkten $z_0 \in G$ holomorph ist.

4.6. **Folgerung.** *Sei f meromorph auf $G \subset \mathbb{C}$. Dann ist $\tilde{f} : G \to \hat{\mathbb{C}}$ wie in Satz 4.4 holomorph.*

Ist umgekehrt $f : G \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph, so ist entweder $f = \infty$ konstant, oder $D = f^{-1}(\infty) \subset G$ ist diskret, und $f : G \setminus D \to \mathbb{C}$ ist meromorph auf G.

Beweis. $\tilde{f}$ ist stetig nach Satz 4.4 und jedenfalls außerhalb der Pole von f holomorph. Sei $z_0 \in G$ ein Pol von f. Dann gilt $(1/f)(z) \to 0$ für $z \to z_0$, also hat $1/f$ in z_0 eine hebbare Singularität und lässt sich zu einer dort holomorphen Funktion fortsetzen, die mit $1/\tilde{f}$ übereinstimmt. Also ist $\tilde{f}$ in z_0 holomorph.

Ist $f : G \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph und nicht konstant ∞, dann sind die ∞-Stellen von f isoliert (denn die Nullstellen der dort holomorphen Funktion $1/f$ sind isoliert), also ist D diskret. Nach Voraussetzung ist $f|_{G \setminus D}$ holomorph als Abbildung nach $\mathbb{C}$. Außerdem gilt für $z_0 \in D$, dass $f(z) \to \infty$ für $z \to z_0$, also auch $|f(z)| \to \infty$. Das impliziert, dass $f|_{G \setminus D}$ in z_0 einen Pol hat. Insgesamt ist also $f|_{G \setminus D}$ in G holomorph bis auf isolierte Singularitäten, die Pole sind, also ist die Funktion meromorph in G. $\square$

Wir können also meromorphe Funktionen mit holomorphen Funktionen nach $\hat{\mathbb{C}}$ identifizieren und umgekehrt (mit Ausnahme der konstanten Funktion $f = \infty$).

Analog können wir auch Funktionen auf (Teilmengen von) $\hat{\mathbb{C}}$ betrachten.

4.7. **Definition.** Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet (also offen und zusammenhängend) und $f : G \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. f heißt *holomorph in* $z_0 \in G$, wenn entweder

- $z_0 \in \mathbb{C}$ und f in z_0 holomorph ist nach Definition. 4.5, oder
- $z_0 = \infty$, und sich $z \mapsto f(1/z)$ zu einer in 0 holomorphen Funktion fortsetzen lässt.

Ist f auf dem Komplement einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ holomorph, so hat $z \mapsto f(1/z)$ in $z = 0$ eine isolierte Singularität. Je nachdem, ob diese Singularität hebbar, ein Pol oder wesentlich ist, sagt man, f habe bei ∞ eine hebbare Singularität, einen Pol oder eine wesentliche Singularität. f lässt sich genau dann zu einer in ∞ holomorphen Funktion nach $\mathbb{C}$ fortsetzen, wenn f in ∞ eine hebbare Singularität hat. f lässt sich genau dann zu einer in ∞ holomorphen Abbildung nach $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen, wenn f in ∞ höchstens einen Pol hat. In diesem Fall setzen wir

$$\operatorname{ord}_\infty(f) = \operatorname{ord}_0\bigl(z \mapsto f(1/z)\bigr) .$$

4.8. **Beispiele.**

(1) $z \mapsto 1/z$ lässt sich zu einer biholomorphen Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen (Übungsaufgabe).
(2) Jedes nicht konstante Polynom $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ lässt sich zu einer holomorphen Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen, indem man $f(\infty) = \infty$ setzt. Ist $a_n \neq 0$, dann hat f einen n-fachen Pol bei ∞.
(3) Die Exponentialfunktion $z \mapsto e^z$ lässt sich nicht zu einer holomorphen Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen, denn sie hat eine wesentliche Singularität bei ∞.

Es gibt sehr viele holomorphe Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Wie sieht es mit holomorphen Funktionen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ aus?

Wir betrachten zunächst einen Spezialfall.

4.9. **Lemma.** *Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph mit $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$ (d.h., f ist die Fortsetzung einer ganzen Funktion). Dann ist f ein Polynom.*

Beweis. Da f in ∞ holomorph ist, hat $z \mapsto f(1/z)$ in 0 schlimmstenfalls einen Pol. Es gibt also ein $n \geq 0$ und eine Konstante $M > 0$, so dass $|f(1/z)| \leq M/|z|^n$ ist für z nahe bei 0. Es folgt, dass $|f(z)| \leq M|z|^n$ ist für große $|z|$, also auch für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Cauchyschen Abschätzung für die Taylorkoeffizienten von f ergibt sich dann, dass f ein Polynom vom Grad höchstens n ist. □

Zur Erinnerung: Ist f auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorph, und ist $\overline{U_R(0)} \subset G$, so hat f eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ,$$

die in $U_R(0)$ konvergiert, und es gilt (als Folgerung aus der Cauchyschen Integralformel)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_R(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} \, d\zeta .$$

Daraus folgt die *Cauchysche Abschätzung der Taylorkoeffizienten*

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{R^{n+1}} = \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{R^n} .$$

Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $|f(z)| \le M|z|^n$ für $|z|$ groß, dann kann man R beliebig groß wählen, und es folgt für $m > n$

$$|a_m| \le \liminf_{R\to\infty} \frac{MR^n}{R^m} = 0 ,$$

also ist

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$$

ein Polynom vom Grad höchstens n. Für $n = 0$ hat man den Satz von Liouville.

4.10. **Folgerung.** *Ist $f : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist f konstant.*

Beweis. Am einfachsten sieht man das so: $f(\hat{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt, also insbesondere beschränkt. Dann ist $f|_{\mathbb{C}}$ eine beschränkte ganze Funktion, nach dem Satz von Liouville also konstant.

Hier ist ein anderer Beweis: Wenn f nicht konstant ist, dann ist $f(\hat{\mathbb{C}})$ sowohl kompakt und damit abgeschlossen, als auch offen (nach dem Satz von der Gebietstreue). Die einzigen sowohl offenen als auch abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind $\mathbb{C}$ selbst und die leere Menge (denn $\mathbb{C}$ ist zusammenhängend); von diesen ist nur die leere Menge kompakt. Das Bild von f ist aber nicht leer, Widerspruch. □

4.11. **Satz.** *Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph. Dann ist entweder $f = \infty$ konstant, oder f ist die eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung einer rationalen Funktion auf $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei f nicht konstant ∞. Dann ist nach Folgerung 4.6 f die eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion h. Da f bei ∞ ebenfalls holomorph ist, gibt es eine punktierte Umgebung von ∞ in $\hat{\mathbb{C}}$, in der h keine Pole hat. Das bedeutet, dass die Pole von h in einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ enthalten sind; es folgt, dass h nur endlich viele Pole hat. Sei p ein Polynom, das in den Polen von h Nullstellen der entsprechenden Vielfachheit hat. Dann ist $p \cdot h$ (nach „Stopfen" der jetzt hebbaren Singularitäten) eine ganze Funktion, die bei ∞ einen Pol hat. Nach Lemma 4.9 ist $q = p \cdot h$ ein Polynom, also ist $h = q/p$ eine rationale Funktion. □

4.12. **Folgerung.** *Die biholomorphen Abbildungen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ sind genau die gebrochen-linearen Funktionen*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{mit } ad \neq bc.$$

Diese Abbildungen heißen auch *Möbius-Transformationen.*

Beweis. Ist f wie angegeben, dann ist f nach Satz 4.11 eine holomorphe Abbildung $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Die Bedingung $ad \neq bc$ stellt sicher, dass f nicht konstant ist. Man rechnet nach, dass

$$z \longmapsto \frac{dz - b}{-cz + a}$$

die Umkehrfunktion ist:

$$\frac{d\frac{az+b}{cz+d}-b}{-c\frac{az+b}{cz+d}+a}=\frac{d(az+b)-b(cz+d)}{-c(az+b)+a(cz+d)}=\frac{(ad-bc)z}{ad-bc}=z\,;$$

damit ist klar, dass f biholomorph ist.

Sei umgekehrt $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ biholomorph. Dann ist wiederum nach Satz 4.11 f eine rationale Funktion: $f=p/q$ mit Polynomen p und q ohne gemeinsame Nullstellen. Sei $n=\max\{\deg p,\deg q\}$; dann ist $p-\lambda q$ für fast alle $\lambda\in\mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad n. Es gibt also (mit Vielfachheit gezählt) n Nullstellen von $p-\lambda q$. Diese sind keine Nullstellen von q, also gilt, wenn z_0 eine solche Nullstelle ist, $\operatorname{ord}_{z_0}(p-\lambda q)=\operatorname{ord}_{z_0}(f-\lambda)$. Es gibt also n λ-Stellen von f (mit Vielfachheit). Nach Satz 3.11 gibt es dann für $w\neq\lambda$ nahe bei λ genau n verschiedene w-Stellen von f. Ist $n>1$, ist f also nicht injektiv und damit nicht biholomorph. Da f nicht konstant sein kann, folgt, dass $n=1$ sein muss. Das bedeutet gerade, dass f eine gebrochen-lineare Funktion ist. □

Ist $G\subset\hat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet (oder allgemeiner eine Riemannsche Fläche, siehe unten), dann heißen die biholomorphen Abbildungen $G\to G$ auch die *Automorphismen* von G. Wir werden sie im nächsten Kapitel genauer studieren.

4.13. **Riemannsche Flächen.** Die Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ ist das erste Beispiel einer nichttrivialen *Riemannschen Fläche*. Analog zum Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit aus der reellen Analysis ist eine Riemannsche Fläche ein „Raum“, der lokal so aussieht wie ein Teil der komplexen Ebene. Formal ist eine Riemannsche Fläche eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit M mit einem Atlas, der offene Teilmengen von M mit offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ identifiziert und dessen Kartenwechsel *holomorph* sind. Sind M und M' zwei Riemannsche Flächen, so ist eine Abbildung $f:M\to M'$ *holomorph*, wenn die durch Vor- und Nachschaltung der Karten (bzw. deren Inversen) entstehenden Funktionen holomorph sind.

Jedes Gebiet $G\subset\mathbb{C}$ ist eine Riemannsche Fläche; ein Atlas besteht aus der einen Abbildung $G\hookrightarrow\mathbb{C}$.

Ein Atlas für die Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ ist zum Beispiel gegeben durch die beiden Funktionen $\hat{\mathbb{C}}\supset\mathbb{C}\xrightarrow{\mathrm{id}}\mathbb{C}$ und $\hat{\mathbb{C}}\supset\hat{\mathbb{C}}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto 1/z$, $\infty\mapsto 0$. Unsere Definition der Holomorphie von Funktionen auf (4.7) bzw. nach $\hat{\mathbb{C}}$ (4.5) bedeutet dann gerade „holomorph bezüglich der Karten“.

Leider haben wir in dieser Vorlesung nicht die Zeit, uns näher mit Riemannschen Flächen zu beschäftigen.

Es folgen noch einige Aussagen über meromorphe Funktionen, die nicht direkt etwas mit der Zahlenkugel zu tun haben, aber auch kein eigenes Kapitel verdienen.

4.14. **Definition.** Sei $G\subset\mathbb{C}$ (oder $\subset\hat{\mathbb{C}}$) eine nicht leere offene Teilmenge. Wir bezeichnen die Menge der meromorphen Funktionen auf G mit $\mathcal{M}(G)$.

4.15. **Satz.** *$\mathcal{M}(G)$ ist ein Ring. $\mathcal{M}(G)$ ist ein Körper genau dann, wenn G zusammenhängend ist.*

Beweis. Es ist klar, dass Summe, Differenz und Produkt von meromorphen Funktionen wieder meromorph sind (man betrachte die Laurentreihen in einem gegebenen Punkt). $\mathcal{M}(G)$ ist ein Körper genau dann, wenn für $0\neq f\in\mathcal{M}(G)$ auch

$1/f$ wieder meromorph ist. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn die Nullstellenmenge von f diskret ist, denn dann ist $1/f$ eine Funktion mit isolierten Singularitäten auf G, die hebbar oder Pole sind. Ist die Nullstellenmenge von f nicht diskret, dann hat sie einen Häufungspunkt z_0, und nach dem Identitätssatz ist dann $f = 0$ auf der Zusammenhangskomponente von G, die z_0 enthält. Ist G zusammenhängend, folgt $f = 0$, ein Widerspruch. Also muss f invertierbar sein. Ist G nicht zusammenhängend, dann ist die Funktion, die auf einer Zusammenhangskomponente den Wert 0 und auf den anderen den Wert 1 hat, meromorph (sogar holomorph) und nicht invertierbar. □

4.16. **Folgerung.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ (oder $\subset \hat{\mathbb{C}}$) ein Gebiet, und seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$ mit $g \neq 0$. Dann ist $f/g \in \mathcal{M}(G)$.*

Beweis. Nach Satz 4.15 ist $1/g \in \mathcal{M}(G)$; damit ist auch $f/g = f \cdot 1/g \in \mathcal{M}(G)$. □

Es ist eine interessante Frage, ob auch die Umkehrung gilt: Ist jede auf G meromorphe Funktion f ein Quotient von auf G holomorphen Funktionen? Das ist sicher richtig, wenn f nur endlich viele Pole hat, denn dann kann man ein Polynom p finden, das die entsprechenden Nullstellen hat; dann ist $f = h/p$ mit $h \in \mathcal{O}(G)$ (vergleiche den Beweis von Satz 4.11). Für den allgemeinen Fall braucht man den *Weierstraßschen Produktsatz*, über den wir später noch sprechen werden. Er stellt sicher, dass es eine geeignete holomorphe Funktion p auch dann noch gibt, wenn f unendlich viele Pole in G hat.

5. Konforme Abbildungen und Automorphismen

5.1. **Konforme Abbildungen.** Eine *konforme Abbildung* ist eine winkeltreue und orientierungserhaltende stetig differenzierbare Abbildung $G \to \mathbb{R}^2$, wo $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist. Was heißt das genau? Sei $f = (g, h) : G \to \mathbb{R}^2$ glatt und $(x_0, y_0) \in G$. Dann ist die Ableitung $df_{(x_0,y_0)}$ gegeben durch die Jacobi-Matrix

$$J(x_0, y_0) = \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

f heißt *winkeltreu* in (x_0, y_0), wenn $J = J(x_0, y_0)$ eine invertierbare lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist, die Winkel erhält. Wenn wir das Skalarprodukt zweier Vektoren $v = (v_1, v_2)^\top$ und $w = (w_1, w_2)^\top$ mit

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

bezeichnen, dann ist der Winkel α zwischen v und w gegeben durch

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\sqrt{\langle v, v \rangle}\sqrt{\langle w, w \rangle}}.$$

(Wir nehmen natürlich an, dass weder v noch w der Nullvektor ist.) Wenn wir für v und w einmal $(1, 0)^\top$ und $(0, 1)^\top$ und einmal $(1, 0)^\top$ und $(1, 1)^\top$ einsetzen, dann sehen wir, dass die Spalten von J, die ja die Bilder der Basisvektoren sind, die gleiche Länge haben und aufeinander senkrecht stehen müssen. Es ist also

$$J = \lambda A$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und einer *orthogonalen* Matrix A (d.h. $AA^\top = I$ ist die Einheitsmatrix; die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$). Dann gilt

$$\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle, \quad \text{also} \quad \langle Jv, Jw \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle,$$

woraus folgt, dass J winkeltreu ist. J muss also die obige Form haben. Eine orthogonale Matrix A beschreibt eine Drehung oder eine Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung; die winkeltreuen linearen Abbildungen sind also Drehstreckungen oder Spiegelungen, gefolgt von einer Streckung.

f heißt *orientierungserhaltend* in (x_0, y_0), wenn $J = J(x_0, y_0)$ eine orientierungserhaltende invertierbare lineare Abbildung ist, d.h. orientierte Basen in orientierte Basen überführt. Letzteres ist äquivalent zu $\det J > 0$.

Für eine orthogonale Matrix A gilt $\det A = \pm 1$, und $\det A = 1$ für Drehungen A, $\det A = -1$ für Spiegelungen A. Ist J also winkeltreu und orientierungserhaltend, so ist J eine Drehstreckung und umgekehrt.

Wenn wir jetzt wie üblich $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren, dann entsprechen die Drehstreckungen genau den $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen, also $z \mapsto \alpha z$ mit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Ist $\alpha = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, dann ist das die Drehung um den Winkel φ, zusammen mit der Streckung um den Faktor r.) Ist aber die Ableitung in $z_0 = x_0 + iy_0$ einer reell stetig differenzierbaren Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ($G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet) von der Form $z \mapsto \alpha z$, dann ist f in z_0 komplex differenzierbar mit Ableitung $f'(z) = \alpha$. Wir halten fest:

5.2. **Lemma.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine reell stetig differenzierbare Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ ist konform in $z_0 \in G$ genau dann, wenn f in z_0 komplex differenzierbar ist mit $f'(z_0) \neq 0$.*

Interessanter ist es, wenn f nicht nur in einem Punkt konform ist.

5.3. **Definition.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar.

(1) f heißt *lokal konform* bei $z_0 \in G$, wenn es eine Umgebung U von z_0 in G gibt, so dass f in jedem Punkt von U konform ist.
(2) Ist $G' \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to G'$, dann heißt f *konform*, wenn f bijektiv und in jedem Punkt von G konform ist.

Aus Lemma 5.2 ergibt sich dann folgende Charakterisierung:

5.4. **Satz.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ reell stetig differenzierbar. Dann ist f lokal konform bei $z_0 \in G$ genau dann, wenn f bei z_0 holomorph ist, und $f'(z_0) \neq 0$.*

Sei $G' = f(G)$. Dann ist $f : G \to G'$ konform genau dann, wenn f biholomorph ist.

Ist f bei $z_0 \in G$ lokal konform, dann gibt es eine offene und zusammenhängende Umgebung U von z_0 in G, so dass $f : U \to f(U)$ konform ist.

Beweis. f ist bei z_0 lokal konform genau dann, wenn f in jedem Punkt einer Umgebung $U \subset G$ von z_0 konform ist. Nach Lemma 5.2 bedeutet das, dass f in jedem Punkt von U komplex differenzierbar ist mit nicht verschwindender Ableitung. Also ist f holomorph bei z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$. Ist umgekehrt f holomorph bei z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$, dann ist f komplex differenzierbar auf einer Umgebung von z_0, und (wegen der Stetigkeit von f') f' verschwindet auf einer eventuell kleineren Umgebung U nicht. Nach Lemma 5.2 ist f dann konform in jedem Punkt von U, also lokal konform bei z_0.

Ist $f : G \to G'$ konform, dann ist f bijektiv, und nach dem ersten Teil ist f holomorph mit $f' \neq 0$ auf G. Nach Folgerung 3.14 ist f dann biholomorph. Ist umgekehrt $f : G \to G'$ biholomorph, dann ist f bijektiv, und f ist holomorph; außerdem wissen wir, dass f' nicht verschwindet (siehe etwa Folgerung 3.13). Es folgt, dass f konform ist.

Ist nun f bei z_0 lokal konform, dann haben wir gesehen, dass f bei z_0 holomorph ist mit $f'(z_0) \neq 0$. Nach Folgerung 3.13 ist dann f bei z_0 lokal biholomorph, d.h. es gibt eine (oBdA offene und zusammenhängende) Umgebung U von z_0 in G, so dass $f : U \to f(U)$ biholomorph ist. Dann ist $f : U \to f(U)$ aber konform. □

5.5. **Definition.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ (oder $G \subset \hat{\mathbb{C}}$) ein Gebiet. Ein *Automorphismus* von G ist eine biholomorphe (äquivalent: konforme) Abbildung $f : G \to G$.

5.6. **Bemerkung.** Die Automorphismen eines Gebietes G bilden eine Gruppe, die *Automorphismengruppe* $\operatorname{Aut}(G)$ von G. Die Verknüpfung in $\operatorname{Aut}(G)$ ist durch das Hintereinanderschalten der Abbildungen gegeben; das neutrale Element ist die Identitätsabbildung id_G.

Wir hatten bereits gesehen (Folgerung 4.12):

$$\operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad \neq bc \right\}.$$

5.7. **Lemma.** *Die Abbildung*

$$\phi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}}), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Der Kern besteht aus den skalaren Matrizen λI mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis. Es ist nachzuprüfen, dass das Produkt zweier invertierbarer Matrizen auf die Verknüpfung der entsprechenden Möbius-Transformationen abgebildet wird. Das ist eine Übungsaufgabe. Die Surjektivität ist klar. Ist eine Matrix M im Kern, folgt $\phi(M) = \mathrm{id}$, also $b = c = 0$ und $a = d$, d.h. $M = \lambda I$ mit $\lambda = a = d$. □

5.8. **Bemerkung.** Nach den bekannten Sätzen aus der Algebra gilt also

$$\operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) := \frac{\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})}{\{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}}.$$

Folgendes ist nützlich zu wissen:

5.9. **Lemma.** *Ist $\gamma \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $\gamma \neq \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$, dann hat γ genau einen oder genau zwei Fixpunkte in $\hat{\mathbb{C}}$.*

Insbesondere gilt: Hat γ mindestens drei Fixpunkte, dann ist γ die Identität.

Beweis. Sei $\gamma(z) = (az+b)/(cz+d)$. Die Fixpunkte $z \in \mathbb{C}$ werden durch die Gleichung

$$\gamma(z) = z \iff az + b = (cz+d)z \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

beschrieben. Im Polynom rechts sind alle Koeffizienten null genau dann, wenn $a = d$ und $b = c = 0$, also wenn $\gamma = \mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}}$ ist. Anderenfalls gibt es höchstens zwei Lösungen. $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ ist ein Fixpunkt genau dann, wenn $c = 0$ ist (denn $\gamma(\infty) = a/c$); in diesem Fall hat das Polynom Grad ≤ 1, und es gibt höchstens einen weiteren Fixpunkt. Ist $c \neq 0$, dann gibt es einen oder zwei Fixpunkte in $\mathbb{C}$. □

5.10. **Satz.** *Seien* $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ *und* $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ *je drei verschiedene Punkte. Dann gibt es genau einen Automorphismus* $\gamma \in \operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ *mit* $\gamma(z_j) = w_j$ *für* $j = 1, 2, 3$.

Beweis. Eindeutigkeit: Sind γ_1 und γ_2 zwei Automorphismen mit $\gamma_1(z_j) = \gamma_2(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$, dann gilt für $\gamma = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1$:

$$\gamma(z_j) = \gamma_2^{-1}\big(\gamma_1(z_j)\big) = \gamma_2^{-1}(w_j) = z_j\,,$$

also hat γ die drei Fixpunkte z_1, z_2, z_3. Nach Lemma 5.9 folgt $\gamma = \mathrm{id}$, also $\gamma_1 = \gamma_2$.

Existenz: Seien zunächst $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \infty$. Wir setzen an

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \implies w_1 = \gamma(0) = \frac{b}{d}\,, \quad w_2 = \gamma(1) = \frac{a+b}{c+d}\,, \quad w_3 = \gamma(\infty) = \frac{a}{c}\,.$$

Wir nehmen erst einmal an, dass $w_j \neq \infty$. Dann erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$b - w_1 d = 0\,, \quad a + b - w_2 c - w_2 d = 0\,, \quad a - w_3 c = 0$$

aus drei Gleichungen in den vier Variablen a, b, c, d; es muss eine nichttriviale Lösung haben, die ein geeignetes γ liefert. ($ad \neq bc$ folgt aus $w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq w_1$.) Ist etwa $w_1 = \infty$, dann muss die erste Gleichung ersetzt werden durch $d = 0$, und das Argument geht genauso durch. Analog für $w_2 = \infty$ oder $w_3 = \infty$. Wir schreiben γ_{w_2,w_2,w_3} für den Automorphismus, den wir konstruiert haben.

Sind nun z_1, z_2, z_3 beliebig, dann erfüllt

$$\gamma = \gamma_{w_1,w_2,w_3} \circ \gamma_{z_1,z_2,z_3}^{-1}$$

die Bedingungen. □

Die Aussage des Satzes wird manchmal auch formuliert als „$\operatorname{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ operiert *scharf 3-fach transitiv* auf $\hat{\mathbb{C}}$“.

Eine Gruppe G operiert *k-fach transitiv* auf einer Menge X, wenn es zu je k verschiedenen Elementen $x_1, \dots, x_k \in X$ und $y_1, \dots, y_k \in X$ ein $g \in G$ gibt mit $g(x_j) = y_j$ für alle $1 \leq j \leq k$. Die Operation ist *scharf k-fach transitiv*, wenn dieses $g \in G$ eindeutig bestimmt ist.

Wir werden jetzt die Automorphismengruppen von einigen anderen Gebieten bestimmen. Als erstes betrachten wir die komplexe Ebene $\mathbb{C}$.

5.11. **Lemma.** *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *eine punktierte Umgebung von* $z = 0$. *Ist* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph und injektiv, dann lässt sich* f *zu einer injektiven holomorphen Funktion* $\tilde{f} : U \cup \{0\} \to \hat{\mathbb{C}}$ *fortsetzen.*

Beweis. f hat in $z = 0$ eine isolierte Singularität. Wir zeigen, dass hier keine wesentliche Singularität vorliegen kann. Wir wissen nämlich (Satz von Casorati-Weierstraß, siehe § 0), dass das Bild jeder punktierten Umgebung einer wesentlichen Singularität in $\mathbb{C}$ dicht liegt. Sei $z_0 \in U$, und sei $B \subset U$ eine offene Kreisscheibe um z_0 mit einem Radius $< |z_0|$. Da f nicht konstant ist, ist $f(B) \subset \mathbb{C}$ offen. Sei jetzt $V \subset U \setminus B$ eine weitere punktierte Umgebung von $z = 0$. Dann ist $f(V)$ dicht in $\mathbb{C}$, muss also mit $f(B)$ nichtleeren Durchschnitt haben. Jeder Punkt in diesem Durchschnitt hätte dann mindestens zwei Urbilder unter f, eines in B und eines in V. Das widerspricht der Tatsache, dass f injektiv ist.

Wir haben also eine hebbare Singularität oder einen Pol. In beiden Fällen gibt es die holomorphe Fortsetzung $\tilde{f} : U \to \hat{\mathbb{C}}$ (im ersten Fall ist $\tilde{f}(0) = \lim_{z\to 0} f(z) \in \mathbb{C}$, im zweiten Fall ist $\tilde{f}(0) = \infty$). Im zweiten Fall ist $\tilde{f}$ offensichtlich injektiv, im ersten Fall ebenfalls: Wäre $\tilde{f}(z_0) = \tilde{f}(0)$ mit $z_0 \neq 0$, dann gäbe es disjunkte Umgebungen von z_0 und von 0, die unter $\tilde{f}$ auf die selbe Umgebung von $\tilde{f}(0)$ abgebildet würden; dann wäre aber f schon nicht injektiv gewesen. $\square$

Exkurs: Der Satz von Casorati-Weierstraß. Da es nützlich ist, die Beweisidee für den Satz von Casorati-Weierstraß zu kennen, sei der Beweis hier kurz skizziert.

Sei also U eine punktierte Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität bei z_0. Wir nehmen an, $f(U)$ sei *nicht* dicht in $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine nicht leere offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ mit $f(U) \cap V = \emptyset$. (Eine Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X ist dicht genau dann, wenn A jede nicht leere offene Teilmenge von X trifft.) Sei $w \in V$ und $r > 0$ mit $U_r(w) \subset V$. Dann gilt für alle $z \in U$:

$$|f(z) - w| \geq r\,, \qquad \text{also auch} \qquad \left|\frac{1}{f(z) - w}\right| \leq \frac{1}{r}\,;$$

die isolierte Singularität z_0 von $z \mapsto 1/(f(z) - w)$ ist damit hebbar, und es gibt eine holomorphe Funktion $g : U \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = 1/(f(z) - w)$ für alle $z \in U$. Dann folgt für $z \in U$, dass

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$$

mit g holomorph in z_0, damit kann f in z_0 aber schlimmstenfalls einen Pol haben. Das ist ein Widerspruch dazu, dass f eine wesentliche Singularität hat. Also muss die Annahme falsch sein, und $f(U)$ ist dicht in $\mathbb{C}$.

5.12. **Bemerkung.** *Eine Aussage wie in Lemma 5.11 gilt auch, wenn $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ eine punktierte Umgebung von einem beliebigen $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ ist, und auch für $f : U \to \hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Man betrachte $z \mapsto f(z - z_0)$ (falls $z_0 \in \mathbb{C}$) bzw. $z \mapsto f(1/z)$ (falls $z_0 = \infty$). Hat f Werte in $\hat{\mathbb{C}}$, dann ersetze man U durch $U \setminus f^{-1}(\infty)$. Da f injektiv ist, wird dadurch höchstens ein Punkt entfernt. Am Ende fügt man den Punkt mit dem Funktionswert ∞ wieder ein. Das Argument, das im Beweis von Lemma 5.11 dafür gegeben wurde, dass $\tilde{f}$ im Falle einer hebbaren Singularität injektiv ist, zeigt allgemein, dass eine holomorphe Abbildung $U \to \hat{\mathbb{C}}$ injektiv ist, wenn sie außerhalb einer endlichen Menge injektiv ist. $\square$

5.13. **Satz.** *Die Automorphismen von $\mathbb{C}$ sind genau die affinen Abbildungen*

$$z \longmapsto az + b$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Beweis. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Automorphismus. Dann ist f bijektiv. Nach Lemma 5.11 und Bemerkung 5.12 mit $z_0 = \infty$ kann man f zu einem Automorphismus $\tilde{f}$ von $\hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen, und es gilt $\tilde{f}(\infty) = \infty$. $\tilde{f}$ muss eine Möbius-Transformation sein:

$$\tilde{f}(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,;$$

die Bedingung $\tilde{f}(\infty) = \infty$ bedeutet $c = 0$. Dann kann d nicht ebenfalls verschwinden, und wir können so skalieren, dass $d = 1$ ist. Es folgt $f(z) = \tilde{f}(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$; die Bedingung $ad \neq bc$ reduziert sich auf $a \neq 0$.

Umgekehrt ist klar, dass alle affinen Abbildungen der angegebenen Form Automorphismen von $\mathbb{C}$ sind. $\square$

Als nächstes betrachten wir die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.14. **Satz.** *Die Automorphismen von $\mathbb{C}^*$ sind genau die Abbildungen der Form*

$$f(z) = az \qquad \textit{oder} \qquad f(z) = \frac{a}{z}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis. Es ist klar, dass die angegebenen Funktionen Automorphismen von $\mathbb{C}^*$ sind. Sei also umgekehrt $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ ein Automorphismus. Nach Lemma 5.11 und Bemerkung 5.12 lässt sich f zu einem Automorphismus $g : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen (Übungsaufgabe). Es muss gelten $g(0) = 0$, $g(\infty) = \infty$ oder $g(\infty) = 0$, $g(0) = \infty$. Diese Bedingungen an die Möbius-Transformation g führen sofort auf die angegebenen Formen. $\square$

Jetzt wenden wir uns der offenen Einheitskreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ zu. Das wichtigste Hilfsmittel dabei ist das folgende Lemma von Schwarz:

5.15. **Lemma (Schwarz).** *Sei $f : D \to D$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt für alle $z \in D$, $z \neq 0$, dass $|f(z)| \leq |z|$; außerdem ist $|f'(0)| \leq 1$. Gilt an einer Stelle Gleichheit, dann ist f eine Drehung: $f(z) = \omega z$ mit $|\omega| = 1$.*

Beweis. Sei $g(z) = f(z)/z$; dann hat g in $z = 0$ eine hebbare Singularität, die wir durch $g(0) = f'(0)$ „stopfen“ können. Die erste Aussage des Lemmas ist dann äquivalent zu $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$.

Sei $0 < r < 1$. Die Funktion g nimmt ihr Maximum auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $K_r = \bar{U}_r(0)$ auf dem Rand an. Dort gilt aber

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|f(z)|}{r} < \frac{1}{r}\,.$$

Es folgt, dass $|g(z)| < 1/r$ ist für alle z mit $|z| \leq r$. Mit $r \to 1$ folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$.

Gilt $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in D$, dann nimmt g sein Maximum ($|g| = 1$) in einem Punkt im Inneren jedes K_r mit $r > |z_0|$ an, und g muss konstant sein: $g = \omega$ mit $|\omega| = 1$. Es folgt $f(z) = \omega z$ wie behauptet. $\square$

5.16. **Folgerung.** *Die Automorphismen f der offenen Einheitskreisscheibe D mit $f(0) = 0$ sind genau die Drehungen $z \mapsto \omega z$, $|\omega| = 1$.*

Beweis. Es ist klar, dass jede Drehung ein Automorphismus von D ist, der 0 fest lässt. Sei umgekehrt $f \in \operatorname{Aut}(D)$ mit $f(0) = 0$. Dann sind sowohl f als auch f^{-1} holomorphe Funktionen $D \to D$. Wir können also Lemma 5.15 auf beide anwenden und erhalten

$$|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)| \leq |z| \quad \text{für alle } z \in D.$$

Es muss also Gleichheit gelten: $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in D$; nach dem zweiten Teil von Lemma 5.15 folgt dann, dass f eine Drehung sein muss. $\square$

5.17. **Folgerung.** *Die Automorphismen der punktierten offenen Einheitskreisscheibe $D^* = D \setminus \{0\}$ sind genau die Drehungen $z \mapsto \omega z$ (d.h., $\omega \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| = 1$).*

Beweis. Es ist klar, dass die Drehungen Automorphismen von D^* sind. Sei umgekehrt $f : D^* \to D^*$ ein Automorphismus. Dann ist 0 eine isolierte Singularität von f. Da f beschränkt ist ($|f| < 1$), ist die Singularität hebbar durch einen Wert $w \in D$. Da die Fortsetzung $g : D \to D$ injektiv sein muss und f bijektiv ist, muss $w = 0$ sein (beachte: $w \in D$, da $g(D)$ offen ist). Es ist also g ein Automorphismus von D mit $g(0) = 0$. Nach Folgerung 5.16 ist dann f eine Drehung. □

5.18. **Bemerkung.** Mit analogen Argumenten kann man beweisen:

Ist $G = D \setminus S$ mit S endlich und $f : G \to G$ ein Automorphismus, dann lässt sich f zu einem Automorphismus g von D fortsetzen, und es gilt $g(S) = S$.

Um die Automorphismengruppe von D vollständig zu bestimmen, benötigen wir noch eine Konstruktion.

5.19. **Lemma.** *Sei $z_0 \in D$. Dann ist die Möbius-Transformation*

$$\varphi_{z_0} : z \longmapsto \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

ein Automorphismus von D, und es gilt $\varphi(z_0) = 0$.

Beweis. Ist $|z| = 1$, so gilt

$$|\varphi_{z_0}(z)| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = \frac{|z - z_0|}{|1 - \bar{z}_0 z|} = \frac{|z - z_0|}{|z||\bar{z} - \bar{z}_0|} = 1\,,$$

denn $|z|^2 = z\bar{z} = 1$. φ_{z_0} bildet also den Einheitkreis in sich ab. Da (wie man einfach nachprüft) $\varphi_{z_0}^{-1} = \varphi_{-z_0}$, bildet φ_{z_0} sogar den Einheitskreis auf sich ab. Da die Abbildung auf $\hat{\mathbb{C}}$ bijektiv ist, muss sie D entweder auf D oder auf $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$ abbilden. Wegen $\varphi(z_0) = 0 \in D$ muss $\varphi_{z_0}(D) = D$ sein. Damit ist φ_{z_0} eine bijektive holomorphe Abbildung $D \to D$, also ein Automorphismus von D. □

Man kann auch direkt nachrechnen, dass $\varphi_{z_0}(D) \subset D$ ist, denn für $z_0, z \in D$ ist

$$|1 - \bar{z}_0 z|^2 - |z - z_0|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |z_0|)^2 > 0\,.$$

5.20. **Satz.** *Die Automorphismen der offenen Einheitskreisscheibe D sind genau die Möbiustransformationen*

$$z \longmapsto \omega\varphi_{z_0}(z) = \frac{\omega(z - z_0)}{1 - \bar{z}_0 z}$$

mit $z_0 \in D$ und $|\omega| = 1$.

Beweis. Es ist klar, dass die angegebenen Abbildungen Automorphismen von D sind. Sei umgekehrt $f : D \to D$ ein Automorphismus. Sei $z_0 = f^{-1}(0)$. Dann ist $g = f \circ \varphi_{z_0}^{-1}$ ein Automorphismus von D mit $g(0) = f(\varphi_{z_0}((0)) = f(z_0) = 0$. Nach Folgerung 5.16 ist $g(z) = \omega z$ mit $|\omega| = 1$ eine Drehung. Es folgt

$$f(z) = (g \circ \varphi_{z_0})(z) = \omega\varphi_{z_0}(z)\,.$$

□

5.21. **Folgerung.**

(1) $\mathrm{Aut}(D) = \{f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) \mid f(D) = D\}$.
(2) $\mathrm{Aut}(D)$ *operiert transitiv auf* D*, aber nicht zweifach transitiv.*

Beweis. (1) „$\supset$“ ist klar, und Satz 5.20 zeigt „$\subset$“.

(2) Seien $z_1, z_2 \in D$. Dann ist $f = \varphi_{z_2}^{-1} \circ \varphi_{z_1} \in \mathrm{Aut}(D)$, und $f(z_1) = \varphi_{z_2}^{-1}(\varphi_{z_1}(z_1)) = \varphi_{z_2}^{-1}(0) = z_2$. Also operiert $\mathrm{Aut}(D)$ transitiv auf D. Seien jetzt $z_1 = w_1 = 0$ und $z_2, w_2 \in D$ mit $0 < |z_2| < |w_2|$. Dann gibt es keinen Automorphismus f von D mit $f(z_1) = w_1$ und $f(z_2) = w_2$, denn nach Folgerung 5.16 müsste f eine Drehung sein, dann wäre aber $|w_2| = |f(z_2)| = |z_2|$, Widerspruch. □

5.22. **Folgerung.** *Seien* $z_0 \in D$ *und* $\omega \in \mathbb{C}$ *mit* $|\omega| = 1$*. Dann gibt es genau einen Automorphismus* f *von* D *mit* $f(0) = z_0$ *und* $f'(0) = \omega|f'(0)|$.

Beweis. Übung. □

Bevor wir uns biholomorphen Abbildungen zwischen D und anderen Gebieten zuwenden, soll noch eine wichtige Eigenschaft der Möbius-Transformationen erwähnt werden. Wir haben ja gesehen, dass alle Automorphismen, denen wir bis jetzt begegnet sind, Möbius-Transformationen sind.

5.23. **Satz.** *Eine Möbius-Transformation bildet Kreise und Geraden in* $\mathbb{C}$ *wieder auf Kreise und Geraden ab.*

Man kann Geraden auch auffassen als Kreise durch den Punkt $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$. Tatsächlich entsprechen die Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ gerade allen Kreisen auf der Zahlenkugel.

Beweis. Jede Möbius-Transformation kann geschrieben werden als eine Verknüpfung von Abbildungen der Form $z \mapsto uz + v$ und $z \mapsto 1/z$:

$$\frac{az+b}{cz+d} = (bc - ad)\frac{1}{c^2 z + cd} + \frac{a}{c}$$

für $c \neq 0$; für $c = 0$ ist es klar. Es genügt also, die Behauptung für $z \mapsto uz + v$ und für $z \mapsto 1/z$ zu zeigen. Eine Abbildung $z \mapsto uz + v$ ist eine Drehstreckung zusammen mit einer Verschiebung und führt offensichtlich Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Der interessante Fall ist also die Abbildung $z \mapsto 1/z$.

Wir schreiben $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann haben Kreise und Geraden Gleichungen der Form

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\beta^2 + \gamma^2 > 4\alpha\delta$. (Wenn $\alpha = 0$, dann dürfen β und γ nicht beide verschwinden, und wir haben eine Gerade. Wenn $\alpha \neq 0$, dann haben wir den Kreis

$$\Bigl(x + \frac{\beta}{2\alpha}\Bigr)^2 + \Bigl(y + \frac{\gamma}{2\alpha}\Bigr)^2 = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha\delta}{4\alpha^2}\,,$$

und die Bedingung stellt sicher, dass er positiven Radius hat.) Die Abbildung $z \mapsto 1/z$ bildet (x, y) auf $(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2})$ ab. Die Gleichung wird also transformiert in

$$\alpha\frac{1}{x^2+y^2} + \beta\frac{x}{x^2+y^2} - \gamma\frac{y}{x^2+y^2} + \delta = 0 \iff \delta(x^2 + y^2) + \beta x - \gamma y + \alpha = 0\,.$$

Die Koeffizienten erfüllen die obige Bedingung, also haben wir wieder eine Gerade oder einen Kreis. □

Unter $z \mapsto 1/z$ werden Kreise durch 0 auf Geraden nicht durch 0 abgebildet und umgekehrt.

5.24. **Das Doppelverhältnis.** Man kann Kreise und Geraden auch durch das Doppelverhältnis charakterisieren. Es ist wie folgt definiert: Seien $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation φ mit $\varphi(z_1) = 0$, $\varphi(z_2) = 1$ und $\varphi(z_3) = \infty$. Wir definieren

$$\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \varphi(z_0) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} .$$

Man rechnet nach, dass

$$\varphi(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \Big/ \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$$

ist. Es folgt

$$\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \Big/ \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_2 - z_1)} .$$

Dann gilt:

(1) *Für alle* $\varphi \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ *und alle* z_0, z_1, z_2, z_3 *wie oben gilt*

$$\mathrm{DV}\big(\varphi(z_0), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)\big) = \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) .$$

(2) *Seien* z_0, z_1, z_2, z_3 *und* w_0, w_1, w_2, w_3 *jeweils paarweise verschiedene Punkte in* $\hat{\mathbb{C}}$. *Es gibt genau dann eine Möbius-Transformation* φ *mit* $\varphi(z_j) = w_j$ *für* $j = 0, 1, 2, 3$, *wenn* $\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(w_0, w_1, w_2, w_3)$.

(3) *Seien* $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ *paarweise verschieden. Dann liegen* z_0, z_1, z_2, z_3 *auf einem Kreis oder einer Geraden genau dann, wenn* $\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3)$ *reell ist.* (Geraden enthalten den Punkt ∞, Kreise nicht.)

Beweis. (1) Seien $f, g \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = \infty$ und $g(\varphi(z_1)) = 0$, $g(\varphi(z_2)) = 1$, $g(\varphi(z_3)) = \infty$. Dann gilt $g \circ \varphi = f$, und es folgt

$$\mathrm{DV}\big(\varphi(z_0), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)\big) = g\big(\varphi(z_0)\big) = f(z_0) = \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) .$$

(2) Teil (1) zeigt eine Richtung. Seien z_j und w_j wie angegeben mit $\mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(w_0, w_1, w_2, w_3)$. Seien weiter $f, g \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mit $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = \infty$ und $g(w_1) = 0$, $g(w_2) = 1$, $g(w_3) = \infty$. Dann gilt auch

$$f(z_0) = \mathrm{DV}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(w_0, w_1, w_2, w_3) = g(w_0) ,$$

und $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ hat die gewünschte Eigenschaft.

(3) Zunächst gilt: $z, 0, 1, \infty$ liegen auf einem Kreis oder einer Geraden (hier muss es die reelle Achse sein) genau dann wenn $z = \mathrm{DV}(z, 0, 1, \infty)$ reell ist. Die allgemeine Aussage folgt jetzt aus Teil (2) und Satz 5.23. □

Wir wollen jetzt biholomorphe Abbildungen zwischen verschiedenen Gebieten studieren. Wir werden an Hand von Beispielen sehen, dass viele Gebiete biholomorph zu D sind. Sei

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$$

die *obere Halbebene*.

5.25. **Satz.** *Die Möbius-Transformationen*

$$z \longmapsto i\frac{1-z}{1+z} \qquad \textit{und} \qquad z \longmapsto \frac{i-z}{i+z}$$

induzieren zueinander inverse holomorphe Abbildungen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{H} \qquad \textit{und} \qquad g : \mathbb{H} \longrightarrow D\,.$$

Beweis. f bildet 1, i, -1 ab auf 0, 1, ∞. Nach Satz 5.23 muss f daher den Einheitskreis auf die reelle Achse abbilden. Es folgt, dass f die offene Kreisscheibe D entweder auf $\mathbb{H}$ oder auf die untere Halbebene abbilden muss. Wegen $f(0) = i \in \mathbb{H}$ ist das erste richtig. Man rechnet nach, dass f und g zueinander invers sind; es folgt $g(\mathbb{H}) = D$. □

5.26. **Lemma.** *Seien G und G' Gebiete, und sei $f : G \to G'$ biholomorph. Dann ist*

$$\phi_f : \operatorname{Aut}(G) \longrightarrow \operatorname{Aut}(G')\,, \qquad h \longmapsto f \circ h \circ f^{-1}$$

ein Isomorphismus der Automorphismengruppen von G und G'.

Beweis. Zunächst ist ϕ_f wohldefiniert, denn mit h und f ist auch $\phi_f(h) = f \circ h \circ f^{-1}$ wieder biholomorph; außerdem bildet $\phi_f(h)$ G' auf G' ab. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\phi_f(h_1) \circ \phi_f(h_2) &= \big(f \circ h_1 \circ f^{-1}\big) \circ \big(f \circ h_2 \circ f^{-1}\big) \\
&= f \circ h_1 \circ (f^{-1} \circ f) \circ h_2 \circ f^{-1} \\
&= f \circ (h_1 \circ h_2) \circ f^{-1} \\
&= \phi_f(h_1 \circ h_2)\,.
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ_f ein Gruppenhomomorphismus. Schließlich sieht man leicht, dass $\phi_{f^{-1}}$ zu ϕ_f invers ist, also ist ϕ_f auch bijektiv. □

5.27. **Folgerung.** *Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ besteht aus den Möbius-Transformationen*

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \textit{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R} \textit{ und } ad-bc > 0.$$

Beweis. Man könnte das aus Lemma 5.26 und unserer Kenntnis von $\operatorname{Aut}(D)$ (Satz 5.20) ableiten. Etwas einfacher geht es so: da $\operatorname{Aut}(D)$ aus Möbius-Transformationen besteht und D und $\mathbb{H}$ mittels einer Möbius-Transformation zueinander biholomorph sind, folgt aus Lemma 5.26, dass auch $\operatorname{Aut}(\mathbb{H})$ aus Möbius-Transformationen besteht, und zwar genau aus denen, die $\mathbb{H}$ auf sich abbilden. Diese müssen insbesondere die reelle Achse auf sich abbilden, also die Punkte 0, 1, ∞ auf Punkte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abbilden. Das lineare Gleichungssystem im Beweis von Satz 5.10 hat dann reelle Koeffizienten, also gibt es eine Lösung $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass die Möbius-Transformationen mit reellen Koeffizienten gerade die sind, die die reelle Achse fest lassen. So eine Transformation bildet dann $\mathbb{H}$ entweder auf sich oder auf die untere Halbebene ab. Es gilt

$$\operatorname{Im} \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\,,$$

also wird $i \in \mathbb{H}$ genau dann nach $\mathbb{H}$ abgebildet, wenn $ad - bc > 0$ ist. □

Wir können in Satz 5.25 noch eine Multiplikation mit $-i$ (Drehung um 90° im Uhrzeigersinn) nachschalten. Dann bekommen wir die biholomorphe Abbildung

$$z \longmapsto \frac{1-z}{1+z}$$

von D auf die rechte Halbebene $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$. Die rechte Halbebene ist einfach zusammenhängend und enthält den Ursprung nicht, also gibt es dort einen Zweig log des Logarithmus, den wir so wählen können, dass $\log 1 = 0$ ist. Entsprechend gibt es für $\alpha \in \mathbb{C}$ auf R die Potenzfunktionen $z \mapsto z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$. log und $z \mapsto z^\alpha$ für $0 < \alpha \le 2$ sind injektiv (beachte, dass $\log(re^{it}) = \log r + it$ und $\left(re^{it}\right)^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha t}$ für $r > 0$ und $-\pi/2 < t < \pi/2$). Wir erhalten so biholomorphe Abbildungen zwischen D und weiteren Gebieten:

5.28. **Gebiete konform äquivalent zu D.**

(1) Das Bild von R unter log ist der Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$. Durch Skalieren, Drehen und Verschieben lässt sich dieser auf jeden anderen Streifen (d.h., eine von zwei parallelen Geraden begrenzte offene Menge) biholomorph abbilden:

Alle Streifengebiete sind biholomorph zu D.

(2) Das Bild von R unter $z \mapsto z^\alpha$ mit $0 < \alpha \le 2$ ist der Winkelbereich

$$\{z = re^{i\varphi} \mid r > 0, -\alpha\pi/2 < \varphi < \alpha\pi/2\}\,.$$

Durch Drehen und Verschieben erhalten wir jedes Gebiet, das durch zwei von einem Punkt ausgehende Halbgeraden begrenzt wird:

Alle Winkelgebiete sind biholomorph zu D.

(3) Als Spezialfall mit $\alpha = 2$ erhalten wir:

Die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ ist biholomorph zu D.

(4) Wenn wir den positiven Quadranten $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ (Spezialfall eines Winkelgebiets) einer Möbius-Transformation unterwerfen, die die reelle Achse fest lässt und die imaginäre Achse auf die Einheitskreislinie abbildet (wie zum Beispiel $z \mapsto (z-1)/(z+1)$), dann wird er auf das Innere eines Halbkreises abgebildet. Mit Logarithmen und Potenzfunktionen erhält man dann weiter:

Kreissektoren und Gebiete, die durch drei Geraden begrenzt werden, von denen eine auf den beiden anderen senkrecht steht, sind biholomorph zu D.

Man sieht an diesen Beispielen, dass offenbar sehr viele Gebiete biholomorph zur Einheitskreisscheibe sind. Das wirft die Frage auf, ob man solche Gebiete G charakterisieren kann. Eine notwendige Bedingung ist sicherlich, dass G und D homöomorph sein müssen, denn eine biholomorphe Abbildung ist auch ein Homöomorphismus. Insbesondere muss G *einfach zusammenhängend* sein (d.h., jeder geschlossene Weg in G lässt sich innerhalb von G zu einem Punkt zusammenziehen).

Wenn man sich vergegenwärtigt, wie kompliziert und vielgestaltig einfach zusammenhängende Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ sein können und dass andererseits holomorphe Funktionen starken Einschränkungen unterliegen (man denke etwa an den Satz von Liouville), dann ist das folgende Ergebnis recht überraschend.

5.29. **Riemannscher Abbildungssatz.** *Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann ist G biholomorph äquivalent zu D.*

Der Beweis erfordert keine weitergehenden Hilfsmittel (man braucht allerdings den Satz von Montel über Familien holomorpher Funktionen), ist aber etwas involviert; wir lassen ihn deshalb aus Zeitgründen hier weg. Wer möchte, kann ihn zum Beispiel in [FL] oder [Jae] nachlesen.

Aus Folgerung 5.22 kann man noch folgenden Zusatz ableiten:

Ist $z_0 \in G$, dann gibt es genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \to D$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Wenn wir einfach zusammenhängende Gebiete in $\hat{\mathbb{C}}$ betrachten, dann gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:

(1) $G = \hat{\mathbb{C}}$.

Ist $f : \hat{\mathbb{C}} \to D$ holomorph und nicht konstant, dann ist $f(\hat{\mathbb{C}})$ sowohl offen (Satz von der Gebietstreue) als auch kompakt (als stetiges Bild der kompakten Menge $\hat{\mathbb{C}}$). Keine nicht leere Teilmenge von D erfüllt diese Bedingungen. Also muss f konstant sein. Insbesondere kann $\hat{\mathbb{C}}$ *nicht* zu D biholomorph sein.

(2) $G = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z_0\}$.

Wir können eine Möbius-Transformation anwenden, die z_0 auf ∞ abbildet. Das Bild von G ist dann $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} = \mathbb{C}$. In diesem Fall ist also G zur komplexen Ebene biholomorph.

Ist $f : \mathbb{C} \to D$ holomorph, dann ist f beschränkt, nach dem Satz von Liouville also konstant. Insbesondere kann $\mathbb{C}$ *nicht* zu D biholomorph sein.

(3) $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ hat ≥ 2 Elemente.

Wie eben können wir eine Möbius-Transformation anwenden, die einen der Punkte im Komplement von G auf ∞ abbildet. Das Bild von G ist dann eine echte Teilmenge von $\mathbb{C}$, und nach dem Riemannschen Abbildungssatz 5.29 ist G biholomorph zu D.

Fragen in Richtung dieser Überlegungen kommen immer wieder gerne im Staatsexamen vor. Es ist also sinnvoll, sich die verschiedenen Fälle genau anzuschauen.

6. Folgen, Reihen und unendliche Produkte holomorpher Funktionen

Für die Diskussion einiger weiterer wichtiger Existenzsätze der Funktionentheorie müssen wir uns ein wenig mit der Konvergenz von Folgen holomorpher Funktionen befassen. Grundlegend dafür ist folgende Beobachtung.

6.1. **Definition.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$. Wir sagen, die Folge (f_n) *konvergiert kompakt* auf G, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$ die Folge der Einschränkungen $(f_n|_K)$ gleichmäßig konvergiert.

6.2. **Bemerkung.** Kompakte Konvergenz ist das selbe wie *lokal gleichmäßige Konvergenz*. Letztere bedeutet, dass jedes $z \in G$ eine Umgebung $U \subset G$ hat, so dass $(f_n|_U)$ gleichmäßig konvergiert.

Jede kompakte Teilmenge wird von endlich vielen solcher Umgebungen überdeckt; daher folgt kompakte Konvergenz aus lokal gleichmäßiger Konvergenz. Umgekehrt hat jedes $z \in G$ eine Umgebung U, so dass $\bar{U} \subset G$ kompakt ist; daher folgt lokal gleichmäßige Konvergenz aus kompakter Konvergenz.

6.3. **Lemma.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$. Konvergiert die Folge kompakt auf G, so ist die Grenzfunktion $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ wieder holomorph, und (f_n') konvergiert kompakt gegen f'.*

Man darf dann also Ableitung und Grenzwert vertauschen. Man beachte die wesentlich schwächere Voraussetzung gegenüber der analogen Aussage aus der reellen Analysis, wo die gleichmäßige Konvergenz der Ableitungen *vorausgesetzt* werden muss!

Beweis. Da (f_n) lokal gleichmäßig konvergiert, existiert die Grenzfunktion f und ist jedenfalls stetig. Wir beweisen erst einmal, dass f holomorph ist. Dazu verwenden wir den *Satz von Morera*: f ist holomorph, falls $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für alle Ränder γ von Dreiecken in G. Da $|\gamma|$ kompakt ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig auf γ. Daraus folgt

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\gamma f_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} 0 = 0\,.$$

Also ist f holomorph.

Es bleibt die kompakte (oder lokal gleichmäßige) Konvergenz der Ableitungen f_n' gegen f' zu zeigen. Sei dazu $z_0 \in G$. Wir müssen zeigen, dass es eine Umgebung U von z_0 in G gibt, so dass f_n' auf U gleichmäßig gegen f' konvergiert. Sei $U_0 = U_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe um z_0 mit $\bar{U}_0 \subset G$, und sei $U = U_{r/2}(z_0)$. Sei weiter γ der positiv orientierte Rand von U_0. Wir verwenden die Cauchysche Integralformel:

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

für alle $z \in U_0$ und alle n. Für $z \in U$ ist $\left|(\zeta - z)^{-2}\right| \leq 4/r^2$ auf $|\gamma|$ gleichmäßig beschränkt, also konvergiert die Folge der Funktionen

$$(z, \zeta) \longmapsto \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

gleichmäßig auf $U \times |\gamma|$ gegen $f(\zeta)/(\zeta - z)^2$. Es folgt, dass auch die Folge der Integrale auf U gleichmäßig konvergiert, und zwar gegen $f'(z)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n'(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta = f'(z)\,. \end{aligned}$$

□

Für uns im Folgenden interessanter werden unendliche Reihen sein. Für die kompakte Konvergenz von Reihen gibt es ein relativ leicht zu handhabendes Kriterium. Wir schreiben

$$|f|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\}\,.$$

Wenn K kompakt und f auf K stetig ist, dann ist das Supremum ein Maximum.

6.4. **Satz.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von auf G holomorphen Funktionen. Gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset G$, dass*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|_K < \infty\,,$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ kompakt auf G, und man darf die Reihe beliebig umordnen, ohne die Grenzfunktion zu ändern. Insbesondere ist die Grenzfunktion F holomorph, und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ konvergiert kompakt gegen F'.

Beweis. Dass die Reihe kompakt konvergiert, bedeutet, dass die Folge der Partialsummen $F_n = \sum_{j=0}^{n} f_j$ kompakt konvergiert. Sei $K \subset G$ kompakt. Dann gilt für $n < m$:

$$|F_m - F_n|_K = \Big|\sum_{j=n+1}^{m} f_j\Big|_K \leq \sum_{j=n+1}^{m} |f_j|_K \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j|_K\,,$$

und da $\sum_{j\geq 0} |f_j|_K$ konvergiert, gehen die Reihenreste $\sum_{j>n} |f_j|_K$ gegen null. Es folgt, dass für jedes $z \in K$ die Folge $\big(F_n(z)\big)_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist. Also existiert der Grenzwert

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,,$$

und es gilt

$$|F - F_n|_K \leq \lim_{m\to\infty} |F_m - F_n|_K \leq \sum_{j>n} |f_j|_K \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Damit konvergiert (F_n) gleichmäßig auf K gegen F. Da die kompakte Teilmenge $K \subset G$ beliebig war, gilt auch, dass (F_n) auf G kompakt konvergiert. Die Aussagen im letzten Satz („Insbesondere …“) folgen dann aus Lemma 6.3.

Es bleibt noch zu zeigen, dass man die Reihe beliebig umordnen kann, ohne die kompakte Konvergenz oder die Grenzfunktion zu ändern. Da alle $|f_n|_K \geq 0$ sind, ist die Voraussetzung gegen Umordnung der Reihe unempfindlich, also konvergiert auch jede umgeordnete Reihe kompakt. Wählt man $K = \{z\}$ für $z \in G$, dann sagt die Voraussetzung, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ absolut konvergiert. Es folgt, dass der Wert $F(z)$ der Reihe bei beliebiger Umordnung erhalten bleibt. □

6.5. **Bemerkung.** Satz 6.4 liefert einen weiteren Beweis dafür, dass Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises eine holomorphe Funktion definieren, und dass man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf.

Wir wollen jetzt den Begriff der kompakten Konvergenz auf Reihen *meromorpher* Funktionen ausdehnen. Wir lassen uns von der Vorstellung leiten, dass das Konvergenzverhalten nicht von den ersten endlich vielen Termen beeinflusst werden sollte. Das führt zu folgender Definition.

6.6. **Definition.** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge auf G meromorpher Funktionen. Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf G kompakt konvergiert, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset G$ einen Index n_K gibt, so dass für alle $n > n_K$ die Funktion f_n keine Pole in K hat und die Reihe $\sum_{n > n_K} f_n$ auf K gleichmäßig konvergiert.

Dann ist $f = f_1 + \cdots + f_{n_K} + \sum_{n > n_K} f_n$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Polen (die von $f_1, \ldots, f_{n_K}$ kommen) auf K definiert und (auf jeder in K enthaltenen offenen Menge) meromorph. f hängt nicht von n_K ab, also bekommen wir eine meromorphe Funktion f auf ganz G.

Sei jetzt f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einem Pol in $a \in \mathbb{C}$. Dann hat f in einer punktierten Umgebung von a die Laurentreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{-1} a_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = h_a(z) + g_a(z)\,,$$

wobei h_a und g_a die beiden Teilsummen bezeichnen. h_a heißt der *Hauptteil* von f bei $z = a$, g_a der *Nebenteil.* (Wir hatten das früher schon für beliebige isolierte Singularitäten gesehen.) Der Hauptteil ist ein Polynom in $1/(z-a)$ ohne konstantes Glied. Jede auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion liefert eine Familie $\{h_a \mid a \in P_f\}$ von Hauptteilen; dabei ist P_f die Menge der Pole von f.

Wir wollen uns nun der umgekehrten Fragestellung zuwenden: Wenn wir eine Familie $\{h_a \mid a \in P\}$ von möglichen Hauptteilen vorgeben (das bedeutet, dass $P \subset \mathbb{C}$ diskret ist, und h_a jeweils ein Polynom in $1/(z-a)$ ohne konstantes Glied sein muss), gibt es dann immer eine dazu passende meromorphe Funktion?

Wie so häufig ist die Frage nach der Eindeutigkeit einfacher zu beantworten als die nach der Existenz.

6.7. **Lemma.** *Seien f und g auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktionen. Dann haben f und g genau dann die selben Hauptteile, wenn $f - g$ holomorph ist.*

(Ganz genau müsste man sagen, dass $f - g$ nur hebbare Singularitäten hat.)

Beweis. Wir betrachten einen Punkt $a \in \mathbb{C}$ und zeigen: f und g haben in a den selben Hauptteil $\iff$ $f - g$ hat eine hebbare Singularität in a.

Sei dazu $h_{a,f}$ bzw. $h_{a,g}$ der Hauptteil von f bzw. g in a. Der Hauptteil von $f - g$ bei a ist dann $h_{a,f} - h_{a,g}$, und $f - g$ hat genau dann eine hebbare Singularität bei a, wenn dieser Hauptteil verschwindet, also wenn $h_{a,f} = h_{a,g}$ ist. □

Nun zur Existenz. Sie ist der Inhalt des Satzes von Mittag-Leffler:

6.8. **Satz von Mittag-Leffler für $\mathbb{C}$.** *Sei $P \subset \mathbb{C}$ diskret, und für jedes $a \in P$ sei h_a ein Polynom in $(z-a)^{-1}$ ohne konstantes Glied. Dann gibt es eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f, die außerhalb P holomorph ist und in jedem $a \in P$ den Hauptteil h_a hat.*

Beweis. Die Grundidee für den Beweis ist einfach, dass man die Reihe $\sum_a h_a$ betrachtet. Das Problem ist allerdings, dass es keinerlei Garantie dafür gibt, dass diese Reihe auch konvergiert. Man muss also geeignete Korrekturterme einführen. Erst einmal müssen wir uns aber die Menge P genauer ansehen. Wenn P endlich ist, dann haben wir kein Problem; dann ist obige Reihe eine endliche Summe, und es ist klar, dass sie eine Lösung ist. Wir nehmen also ab jetzt an, dass P

unendlich ist. Außerdem können wir aus P endlich viele Elemente entfernen, denn die entsprechenden Hauptteile können wir am Ende wieder addieren. Wir können also auch annehmen, dass $0 \notin P$ ist.

Behauptung: P ist abzählbar.
Das folgt aus $\mathbb{C} = \bigcup_{n\geq 1} \overline{U_n(0)}$ und daraus, dass jede abgeschlossene (also kompakte) Kreisscheibe nur endlich viele Punkte einer diskreten Menge enthält.

Wir können also schreiben

$$P = \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \quad \text{mit} \quad 0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \quad \text{und} \quad |a_n| \to \infty\,.$$

Unsere Lösungsfunktion wird folgende Form haben:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(h_{a_n}(z) - g_n(z)\bigr)\,,$$

wobei g_n eine geeignete holomorphe Funktion ist. Wenn diese Reihe kompakt konvergiert, dann wird f in $\mathbb{C} \setminus P$ holomorph sein, und der Hauptteil von f in a_n ist h_{a_n} (denn alle anderen Summanden sind holomorph bei a_n). Die einfachsten auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen sind die Polynome. Wir werden also versuchen, g_n als ein Polynom zu wählen, das h_{a_n} auf einer geeigneten Menge gut approximiert. Konkret gehen wir wie folgt vor: Die Funktion h_{a_n} ist auf $U_{|a_n|}(0)$ holomorph; die Taylorreihe von h_{a_n} in $z = 0$ konvergiert also auf $K_n = \bar{U}_{|a_n|/2}(0)$ gleichmäßig gegen h_{a_n}. Es gibt also ein Taylorpolynom g_n mit $|h_{a_n} - g_n|_{K_n} \leq 2^{-n}$.

Behauptung: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(h_{a_n} - g_n)$ konvergiert kompakt auf $\mathbb{C}$.
Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Wegen $|a_n| \to \infty$ gibt es einen Index N, so dass für alle $n > N$ gilt $K \subset K_n$ (denn K ist beschränkt). Dann sind die $h_{a_n} - g_n$ für $n > N$ auf K holomorph, und es gilt

$$\sum_{n>N} \bigl|h_{a_n} - g_n\bigr|_K \leq \sum_{n>N} \bigl|h_{a_n} - g_n\bigr|_{K_n} \leq \sum_{n>N} 2^{-n} = 2^{-N} < \infty\,,$$

also konvergiert die Reihe kompakt auf $\mathbb{C}$ nach Satz 6.4 und Definition 6.6.

Die Summenfunktion f der Reihe hat (wie oben gezeigt) die verlangten Hauptteile.
□

In der Praxis wird man die „Konvergenz erzeugenden Summanden“ g_n nicht immer so wählen wie im Beweis angegeben. Es muss lediglich gesichert sein, dass die entstehende Reihe kompakt konvergiert.

6.9. **Beispiel.** Wir betrachten $P = \mathbb{Z}$ und die Hauptteile $h_n = (z - n)^{-2}$. In diesem Fall konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n$ schon kompakt, man kann also auf die Konvergenz erzeugenden Summanden ganz verzichten (Übung). Man kann zeigen, dass

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$$

gilt (Übung).

6.10. **Beispiel.** Wir betrachten wieder $P = \mathbb{Z}$, aber diesmal $h_n = (z-n)^{-1}$. In diesem Fall konvergiert $\sum_n h_n$ nicht absolut (Abschätzung nach unten gegen die harmonische Reihe), also müssen wir geeignete g_n einführen. Die Taylorreihe bei $z = 0$ von $(z-n)^{-1}$ ist (für $n \neq 0$)

$$\frac{1}{z-n} = -\frac{1}{n}\,\frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -\frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} - \frac{z^2}{n^3} - \dots .$$

Wir probieren $g_n = -1/n$; es gilt

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{n(z-n)} \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \leq \frac{2}{n^2}|z| \quad \text{für } |z| \leq n/2.$$

Daran sieht man, dass die Reihe

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

kompakt konvergiert (Übung). Man kann dann zeigen, dass

$$h(z) = \pi \cot \pi z$$

ist (Übung). Durch Zusammenfassen der Terme für n und $-n$ erhält man die alternative kompakt und absolut konvergente Reihenentwicklung

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}\,.$$

6.11. **Bemerkung.** Der Satz von Mittag-Leffler gilt allgemein für beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$. In diesem Fall muss die Menge der Polstellen diskret in G sein, die Pole können sich aber gegen den Rand von G häufen. Unser Beweis deckt den allgemeinen Fall also nicht mit ab. Der allgemeine Beweis verwendet die selbe Idee (Konvergenz erzeugende Summanden), ist aber technisch etwas komplizierter.

Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, in wie weit wir die Nullstellen einer auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion vorschreiben können. Eine notwendige Bedingung ist sicherlich, dass sich die Nullstellen nirgends häufen, denn sonst müsste die Funktion nach dem Identitätssatz die Nullfunktion sein. Unsere Frage lautet also: Gegeben eine diskrete Menge $N \subset \mathbb{C}$ und für jedes $a \in N$ eine positive ganze Zahl n_a, gibt es dann stets eine ganze Funktion f, die in $a \in N$ jeweils eine Nullstelle der Vielfachheit n_a hat und sonst nirgends verschwindet?

Wir betrachten erst einmal wieder die Frage, wie eindeutig eine solche Funktion bestimmt ist.

6.12. **Lemma.** *Seien f und g zwei ganze Funktionen. Genau dann haben f und g die selben Nullstellen mit den selben Vielfachheiten, wenn es eine ganze Funktion h gibt, so dass $f = e^h\, g$.*

Beweis. Die Funktion e^h verschwindet nirgends, also gilt $v_a(e^h g) = v_a(g)$ für alle $a \in \mathbb{C}$, d.h., g und $f = e^h g$ haben die selben Nullstellen.

Gilt umgekehrt, dass f und g die selben Nullstellen haben, dann ist der Quotient f/g holomorph und verschwindet nirgends. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gibt es einen Logarithmus h von f/g. Es folgt $f/g = e^h$, also $f = e^h g$. $\square$

Nun zur Existenz. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes.

6.13. **Weierstraßscher Produktsatz für $\mathbb{C}$.** *Sei $N \subset \mathbb{C}$ diskret, und für jedes $a \in N$ sei $n_a \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann gibt es eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die in $a \in N$ jeweils eine Nullstelle der Vielfachheit n_a hat und sonst nirgends verschwindet.*

Der Satz macht noch eine Aussage über die Gestalt einer solchen Funktion, was den Namen „Produktsatz" erklärt. Wir kommen nach dem Beweis darauf zurück.

Beweis. Angenommen, es gibt so eine Funktion f. Dann gilt für die logarithmische Ableitung $g = f'/f$, dass g holomorph ist bis auf einfache Pole in $a \in N$ mit Residuum n_a (vergleiche die Diskussion des Null- und Polstellen zählenden Integrals in Abschnitt 3). Die Hauptteile von g sind also $h_a = n_a/(z-a)$ für $a \in N$. Nach dem Satz 6.8 von Mittag-Leffler gibt es eine solche Funktion g. Wir wollen daraus unser f konstruieren. Dazu fixieren wir einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus N$ und definieren für $z \in \mathbb{C} \setminus N$

$$f(z) = \exp\Big(\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta\Big)\,,$$

wobei γ irgend ein Weg in $\mathbb{C} \setminus N$ von z_0 nach z ist.

Wir zeigen zunächst, dass f wohldefiniert ist, also $f(z)$ nicht von der Wahl des Weges γ abhängt. Seien dazu γ_1 und γ_2 zwei Wege von z_0 nach z, und sei γ der geschlossene Weg, den wir erhalten, wenn wir erst γ_1 und dann in Gegenrichtung γ_2 durchlaufen. Es gilt dann

$$\int_{\gamma_1} g(\zeta)\,d\zeta - \int_{\gamma_2} g(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{a\in N} I(\gamma,a) n_a = 2\pi i k \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

nach dem Residuensatz, wobei k eine ganze Zahl ist. Es folgt

$$\exp\Big(\int_{\gamma_1} g(\zeta)\,d\zeta\Big) = e^{2\pi i k} \exp\Big(\int_{\gamma_2} g(\zeta)\,d\zeta\Big) = \exp\Big(\int_{\gamma_2} g(\zeta)\,d\zeta\Big)\,,$$

denn $e^{2\pi i} = 1$. Das zeigt, dass f wohldefiniert ist.

Jetzt zeigen wir, dass f in $\mathbb{C} \setminus N$ holomorph ist. Sei dazu $w \in \mathbb{C} \setminus N$ und $U = U_r(w) \subset \mathbb{C} \setminus N$ eine offene Kreisscheibe um w. Für $z \in U$ können wir als Weg γ einen festen Weg γ_0 von z_0 nach w nehmen, an den wir die Strecke $[w, z]$ anhängen. Dann ist

$$\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_0} g(\zeta)\,d\zeta + \int_w^z g(\zeta)\,d\zeta\,;$$

der erste Summand ist konstant, und der zweite ist holomorph in U (und definiert dort eine Stammfunktion von g). Damit ist auch f holomorph in U. Da $f(z)$ ein Wert der Exponentialfunktion ist, gilt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus N$. Außerdem folgt aus der Konstruktion von f, dass $f'/f = g$ ist.

Wir haben also eine in $\mathbb{C} \setminus N$ holomorphe und nicht verschwindende Funktion f definiert, so dass f'/f bei $a \in N$ den Hauptteil $n_a/(z-a)$ hat. Das folgende Lemma 6.14 zeigt, dass dann f bei a eine hebbare Singularität hat, so dass die holomorphe Fortsetzung von f in den Punkt a eine Nullstelle der Vielfachheit n_a hat. Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

6.14. **Lemma.** *Sei $a \in \mathbb{C}$, und f sei in einer punktierten Umgebung U von a holomorph und $\neq 0$, so dass f'/f in a einen einfachen Pol mit Residuum $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ hat. Dann ist die Singularität a von f hebbar, und die holomorphe Fortsetzung von f auf $U \cup \{a\}$ hat in a eine Nullstelle der Vielfachheit n.*

Beweis. Wir können in einer punktierten Kreisscheibe V um a schreiben

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-a} + h(z)$$

mit einer auch in a holomorphen Funktion h. Sei für $z \in V$

$$g(z) = f(z)(z-a)^{-n} \exp\Big(-\int_a^z h(\zeta)\, d\zeta\Big)\,.$$

Dann ist g in V holomorph und ohne Nullstellen, und es gilt

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{n}{z-a} - h(z) = 0\,.$$

Es folgt, dass g konstant ist; sei $0 \neq C \in \mathbb{C}$ der Wert von g. Dann haben wir

$$f(z) = C(z-a)^n \exp\Big(\int_a^z h(\zeta)\, d\zeta\Big)\,;$$

der letzte Faktor ist holomorph und verschwindet nicht bei a, also hat f eine holomorphe Fortsetzung in den Punkt a mit einer Nullstelle der Vielfachheit n. □

6.15. **Bemerkung.** Wie der Satz von Mittag-Leffler gilt auch der Weierstraßsche Produktsatz für beliebige Gebiete $G \subset \mathbb{C}$. Das folgt übrigens *nicht* aus unserem Beweis des Produktsatzes aus dem Satz von Mittag-Leffler, denn wir haben verwendet, dass $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist (wo?). Es gibt aber einen direkten Beweis, der sich auf die allgemeine Situation anpassen lässt.

6.16. **Folgerung.** *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist der Körper der meromorphen Funktionen auf G der Quotientenkörper des Rings der holomorphen Funktionen auf G.*

Beweis. Jeder Quotient von zwei holomorphen Funktionen ist meromorph. Wir müssen also nur die Umkehrung zeigen. Sei also f meromorph auf G, und sei P die Menge der Polstellen von f, und für $a \in P$ sei $n_a = -\operatorname{ord}_a f$ die Vielfachheit der Polstelle a. Nach dem Weierstraßschen Produktsatz 6.13 gibt es eine auf G holomorphe Funktion g, die genau in allen $a \in P$ Nullstellen der Vielfachheit n_a hat (beachte: P ist diskret in G). Dann hat $h = fg$ nur hebbare Singularitäten, kann also zu einer auf G holomorphen Funktion fortgesetzt werden, und $f = h/g$ ist Quotient zweier holomorpher Funktionen wie gewünscht. □

6.17. **Warum „Produktsatz"?** Wenn man sich die Konvergenz erzeugenden Summanden in der Konstruktion der Funktion g im Beweis von Satz 6.13 ansieht, dann erhält man die genauere Aussage, dass man g in der Form

$$g(z) = \frac{n_0}{z} + \sum_{0 \neq a \in N} n_a \Big(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \cdots + \frac{z^{k_a - 1}}{a^{k_a}}\Big)$$

wählen kann mit geeigneten Zahlen $k_a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Für f erhält man daraus das (kompakt konvergente) unendliche Produkt

$$f(z) = z^{n_0} \prod_{0 \neq a \in N} \left(\left(1 - \frac{z}{a}\right) e^{\frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k_a}\left(\frac{z}{a}\right)^{k_a}} \right)^{n_a}.$$

Diese Darstellung erklärt den Namen *Produktsatz*.

6.18. **Beispiel.** Wir betrachten die Funktion $f(z) = \sin \pi z$. Das ist eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in $\mathbb{Z}$ und ohne weitere Nullstellen. Die logarithmische Ableitung von f ist

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi \cot \pi z\,.$$

nach Beispiel 6.10 gilt

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right).$$

Aus der Konstruktion oben folgt, dass

$$\sin \pi z = Cz \prod_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

mit einer Konstanten $C \in \mathbb{C}$. Die Ableitung bei $z = 0$ der rechten Seite ist C (betrachte den z-Term der Taylorreihe), die der linken Seite ist π. Es folgt, dass $C = \pi$ ist, und wir haben (wenn wir die Faktoren zu n und $-n$ zusammenfassen) die *Produktdarstellung der Sinusfunktion:*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Literatur

[FL] W. Fischer und I. Lieb: *Funktionentheorie. Komplexe Analysis in einer Veränderlichen,* 9. Auflage, Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2008.

[Jae] K. Jänich: *Funktionentheorie. Eine Einführung,* 6. Auflage, Springer, Berlin u.a., 2004.

[KvW] H. Kerner und W. von Wahl: *Mathematik für Physiker,* Kapitel 14: Funktionentheorie, Springer, Berlin u.a., 2007.
Online: http://www.springerlink.com/content/w64156/