

Einführung in die Algebra

Sommersemester 2022

Universität Bayreuth

MICHAEL STOLL

INHALTSVERZEICHNIS

1. Permutationen	3
2. Operationen von Gruppen auf Mengen	7
3. Die Sätze von Sylow	13
4. Semidirekte Produkte	17
5. Körpererweiterungen	25
6. Algebraische Elemente und Erweiterungen	29
7. Zerfällungskörper	34
8. Endliche Körper	37
9. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	43
10. Separable Körpererweiterungen	48
11. Automorphismen von Körpererweiterungen	53
12. Galois-Erweiterungen	57
13. Kreisteilungskörper und Kreisteilungspolynome	64
14. Die Diskriminante	69
15. Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad 3 und 4	74
16. Radikalerweiterungen und auflösbare Gruppen	81
Literatur	91

Diese Vorlesung setzt die Vorlesung „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“ aus dem Wintersemester 2021/2022 fort. Sie behandelt zwei Hauptthemen: Einerseits werden (insbesondere endliche) Gruppen genauer studiert; auf der anderen Seite geht es um algebraische Körpererweiterungen. Für die Konstruktion solcher Körpererweiterungen spielen die im vorigen Semester genauer betrachteten Polynomringe eine wesentliche Rolle.

Einige Abschnitte in diesem Skript sind kleiner gedruckt. Dabei kann es sich um ergänzende Bemerkungen zur Vorlesung handeln, die nicht zum eigentlichen Stoff gehören, die Sie aber vielleicht trotzdem interessant finden. Manchmal handelt es sich auch um Beweise, die in der Vorlesung nicht ausgeführt werden, zum Beispiel weil sie relativ lang sind und fürs Verständnis nicht unbedingt benötigt werden, die aber doch der Vollständigkeit halber oder auch als Anregung etwa für Übungsaufgaben im Skript stehen sollten.

Einige der Definitionen und Sätze (oder eventuell Lemmas und Folgerungen) sind mit einem Stern markiert. In der Klausur wird jeweils eine der Definitionen und einer der Sätze abgefragt werden.

Für die Zwecke dieser Vorlesung ist Null eine natürliche Zahl:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Meistens werden wir zur Vermeidung von Unklarheiten aber $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ für diese Menge schreiben (und $\mathbb{Z}_{>0}$ für die Menge der positiven ganzen Zahlen). Wie üblich steht \mathbb{Z} für den Ring der ganzen Zahlen, \mathbb{Q} für den Körper der rationalen Zahlen, \mathbb{R} für den Körper der reellen Zahlen und \mathbb{C} für den Körper der komplexen Zahlen. Außerdem steht $A \subset B$ für die nicht notwendig strikte Inklusion ($A = B$ ist also erlaubt); für die strikte Inklusion schreiben wir $A \subsetneq B$.

1. PERMUTATIONEN

Um uns wieder mit Gruppen (den Objekten, die wir zunächst weiter studieren werden) vertraut zu machen, wollen wir uns als relativ konkretes (und auch wichtiges) Beispiel für endliche Gruppen in diesem Abschnitt die symmetrische Gruppe S_n und ihre Elemente etwas genauer anschauen.

Allgemein war für eine Menge X die *symmetrische Gruppe* $S(X)$ von X definiert als die Menge aller bijektiven Abbildungen („Permutationen“) von X nach X , mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen als Verknüpfung. Im Fall $X = \{1, 2, \dots, n\}$ wird die Gruppe auch mit S_n bezeichnet.

DEF
symmetrische
Gruppe

Wir beginnen mit einer Definition für beliebige Mengen X .

* **1.1. Definition.** Seien X eine Menge und $T \subset X$ eine endliche Teilmenge mit $\#T = m > 0$. Eine Permutation $\sigma \in S(X)$ heißt ein *Zykel* auf T , wenn man die Elemente von T so als t_1, t_2, \dots, t_m nummerieren kann, dass gilt

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, m-1\}: \sigma(t_j) = t_{j+1}, \quad \sigma(t_m) = t_1, \quad \forall x \in X \setminus T: \sigma(x) = x.$$

DEF
Zykel
Transposition

Wir schreiben $\sigma = (t_1 t_2 \dots t_m)$. Dabei ist zu beachten, dass die Schreibweise nicht eindeutig ist, denn es gilt zum Beispiel auch $\sigma = (t_2 t_3 \dots t_m t_1)$. σ heißt dann auch ein *m-Zykel* und m heißt die *Länge* des Zyklus σ . Ein 2-Zykel heißt auch eine *Transposition*. Zwei Zykel heißen *disjunkt*, wenn die zugehörigen Mengen T disjunkt sind. \diamond

Es ist klar, dass die Ordnung eines m -Zykels σ genau m ist: $\sigma^m = \text{id}$ und für $1 \leq k < m$ ist $\sigma^k \neq \text{id}$ (da zum Beispiel $\sigma^k(t_1) = t_{k+1} \neq t_1$ ist).

1.2. Beispiel. Wie viele Zykel gibt es auf einer m -elementigen Menge?

BSP
Anzahl von
Zykeln

Es gibt $m!$ Möglichkeiten, die Elemente als $(t_1 t_2 \dots t_m)$ hinzuschreiben. Davon ergeben aber jeweils m denselben Zykel (denn wir können einen Zykel beginnend mit einem beliebigen Element notieren). Es gibt also $m!/m = (m-1)!$ verschiedene Zykel auf einer m -elementigen Menge.

Wie viele m -Zykel gibt es in der S_n ? Jeder 1-Zykel ist die Identität, also gibt es nur einen 1-Zykel. Sei jetzt $m \geq 2$. Es gibt $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten, eine m -elementige Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$ auszuwählen; auf jeder dieser $\binom{n}{m}$ Teilmengen gibt es $(m-1)!$ Zykel. Insgesamt gibt es also

$$\binom{n}{m} (m-1)! = \frac{n!}{(n-m)!m!} (m-1)! = \frac{n!}{(n-m)!m} = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m}$$

verschiedene m -Zykel in der S_n . \clubsuit

Wir schreiben noch eine einfache Eigenschaft von Zykeln auf.

1.3. Lemma. Sind $\sigma_1, \sigma_2 \in S(X)$ zwei disjunkte Zykel, dann gilt $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

LEMMA
disjunkte
Zykel
kommutieren

Beweis. Seien T_1, T_2 die zugehörigen Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (T_1 \cup T_2) &\implies (\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = x = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(x), \\ x \in T_1 &\implies (\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = \sigma_1(x) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(x), \\ x \in T_2 &\implies (\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = \sigma_2(x) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(x), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Zykel sind wichtig wegen der folgenden Beschreibung von Permutationen. Wir werden ab jetzt die Verknüpfung in der S_n einfach als Multiplikation schreiben statt mit dem Verknüpfungszeichen „ \circ “.

* **1.4. Satz.** *Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann eindeutig (bis auf Reihenfolge) als Produkt von paarweise disjunkten Zykeln geschrieben werden, in denen insgesamt alle Elemente von $\{1, 2, \dots, n\}$ vorkommen.*

SATZ
Permutation
als Produkt
von Zykeln

Beweis. Für $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ sei $B(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\}$ die „Bahn von x unter σ “. Da σ endliche Ordnung hat, gilt $y \in B(x) \iff B(x) = B(y)$; wir erhalten also eine Partition von $\{1, 2, \dots, n\}$ in die verschiedenen Mengen $B(x)$. Auf jeder dieser Mengen ist σ ein Zykel; insgesamt ist σ das Produkt dieser Zykeln. Jede Zerlegung von σ als Produkt disjunkter Zykeln muss die Mengen $B(x)$ als zugehörige Teilmengen haben; daraus folgt die Eindeutigkeit. \square

Da 1-Zykel „nichts tun“ (sie sind die Identität), werden sie üblicherweise nicht mit aufgeschrieben. Der Satz lässt sich also auch alternativ so formulieren:

Jede Permutation $\sigma \in S_n$ kann eindeutig (bis auf Reihenfolge) als Produkt von paarweise disjunkten Zykeln der Länge ≥ 2 geschrieben werden.

Um eine eindeutige Notation zu haben, beginnt man einen Zykel meistens mit dem kleinsten Element, also $(1\ 2\ 3)$ und nicht $(2\ 3\ 1)$ oder $(3\ 1\ 2)$. Die verschiedenen Zykeln im Produkt ordnet man meistens aufsteigend nach dem kleinsten Element.

1.5. Beispiel. Sei etwa $\sigma = [531674289] \in S_9$ (also $\sigma(1) = 5, \sigma(2) = 3$ usw.). Wir verfolgen die „Bahnen“ der Elemente unter σ :

$$1 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 6 \mapsto 4, \quad 8 \mapsto 8, \quad 9 \mapsto 9.$$

BSP
Zykel-
zerlegung

Daraus ergibt sich die Zykelzerlegung

$$\sigma = (1\ 5\ 7\ 2\ 3)(4\ 6)(8)(9).$$



1.6. Definition. Sei $\sigma \in S_n$. Die in der Zerlegung von Satz 1.4 auftretenden Längen der Zykeln ergeben den *Zykeltyp* von σ . Man schreibt ihn häufig in „Exponentialschreibweise“, also $1^{k_1}2^{k_2} \dots n^{k_n}$ für k_1 1-Zykel, k_2 2-Zykel usw. (wobei Terme mit Exponent null weggelassen werden). \diamond

DEF
Zykeltyp

1.7. Beispiele.

(1) Wir schreiben die Elemente der S_3 in dieser Zykelschreibweise auf:

$$S_3 = \{\text{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.$$

Hier gibt es also die drei Zykeltypen $1^3, 1^12^1$ und 3^1 .

(2) In der S_4 gibt es die folgenden Zykeltypen (in Klammern das Signum):

$$1^4 (+1): \text{id}$$

$$1^22^1 (-1): (1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$$

$$1^13^1 (+1): (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)$$

$$2^2 (+1): (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)$$

$$4^1 (-1): (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)$$

Insgesamt erhalten wir $1+6+8+3+6 = 24$ Elemente, wovon $1+8+3 = 12$ positives Signum haben, wie es sein muss. \clubsuit

BSP
 S_3, S_4

Zykel verhalten sich gut unter Konjugation.

1.8. Lemma. Seien $\zeta = (t_1 t_2 \dots t_m) \in S_n$ ein m -Zykel und $\sigma \in S_n$ beliebig. Dann gilt

$$\sigma (t_1 t_2 \dots t_m) \sigma^{-1} = (\sigma(t_1) \sigma(t_2) \dots \sigma(t_m)).$$

LEMMA
Zykel und
Konjugation

Beweis. Sei $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Für $x \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \sigma(T)$ gilt $\sigma^{-1}(x) \notin T$, also $\zeta(\sigma^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(x)$ und damit $(\sigma\zeta\sigma^{-1})(x) = x$. Für $x = \sigma(t_j)$ gilt

$$(\sigma(t_1 t_2 \dots t_m) \sigma^{-1})(x) = (\sigma(t_1 t_2 \dots t_m))(t_j) = \sigma(t_{j+1}) \quad \text{bzw. } \sigma(t_1) \quad \text{für } j = m.$$

Also ist $\sigma\zeta\sigma^{-1}$ der angegebene Zykel. \square

1.9. Folgerung. Zwei Permutationen $\tau_1, \tau_2 \in S_n$ sind genau dann zueinander konjugiert (d.h., es gibt $\sigma \in S_n$ mit $\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$), wenn sie denselben Zykeltyp haben.

FOLG
Konjugations-
klassen
in S_n

Beweis. Sind τ_1 und $\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1}$ konjugiert und ist $\tau_1 = \zeta_1\zeta_2 \dots \zeta_k$ ein Produkt von paarweise disjunkten Zykeln, dann ist nach Lemma 1.8

$$\tau_2 = \sigma\tau_1\sigma^{-1} = (\sigma\zeta_1\sigma^{-1})(\sigma\zeta_2\sigma^{-1}) \dots (\sigma\zeta_k\sigma^{-1})$$

ein Produkt von disjunkten Zykeln derselben Längen, hat also denselben Zykeltyp wie τ_1 .

Haben τ_1 und τ_2 denselben Zykeltyp, dann können wir schreiben

$$\tau_1 = \zeta_1\zeta_2 \dots \zeta_k \quad \text{und} \quad \tau_2 = \zeta'_1\zeta'_2 \dots \zeta'_k$$

als Produkte paarweise disjunkter Zykeln, in denen jeweils alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ auftreten, und sodass die Längen von ζ_j und ζ'_j übereinstimmen. Wir fixieren jeweils eine Schreibweise für jeden vorkommenden Zykel. Es gibt dann eine Permutation $\sigma \in S_n$, die die im Produkt für τ_1 von links nach rechts vorkommenden Elemente auf die entsprechenden Elemente im Produkt von τ_2 abbildet (denn es kommt jeweils jedes Element aus $\{1, 2, \dots, n\}$ genau einmal vor). Nach Lemma 1.8 gilt dann $\sigma\zeta_j\sigma^{-1} = \zeta'_j$ für $1 \leq j \leq k$ und damit auch $\sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_2$. \square

Manchmal ist es hilfreich zu wissen, dass die Gruppe S_n von gewissen Elementen erzeugt wird. So kann man zum Beispiel zeigen, dass eine Untergruppe U der S_n schon die ganze S_n sein muss, indem man nachweist, dass U Erzeuger von S_n enthält. Es ist klar, dass (für $n \geq 3$) ein Erzeuger nicht ausreicht, da die S_n nicht abelsch und damit auch nicht zyklisch ist. Es zeigt sich allerdings, dass man mit zwei Erzeugern auskommt.

1.10. Satz. Sei $n \geq 2$.

(1) Es gilt $S_n = \langle (12), (23), (34), \dots, (n-1 n) \rangle$ („bubble sort“).

(2) Es gilt $S_n = \langle (12), (123 \dots n) \rangle$.

(3) Ist $n = p$ eine Primzahl, dann wird S_p von einer beliebigen Transposition zusammen mit einem beliebigen p -Zykel erzeugt.

SATZ
Erzeugung
von S_n

Beweis.

- (1) Das ist das Prinzip hinter dem bekannten „bubble sort“-Sortieralgorithmus: Man kann eine Folge von Elementen durch sukzessives Vertauschen benachbarter Glieder in jede beliebige Reihenfolge bringen.

Etwas formaler: Für $\sigma \neq \text{id}$ sei j die kleinste Zahl aus $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\sigma(j) \neq j$. Mit diesem j sei dann

$$\sigma' = (j \ j+1)(j+1 \ j+2) \cdots (\sigma(j) - 1 \ \sigma(j))\sigma;$$

dann gilt $\sigma'(i) = i$ für alle $i \leq j$. Nach endlich vielen Wiederholungen dieser Prozedur erhalten wir

$$\text{id} = P\sigma,$$

wobei P ein Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente ist. Es folgt $\sigma = P^{-1}$, was ebenfalls ein Produkt solcher Transpositionen ist.

- (2) Seien $\sigma = (1\ 2 \dots n)$ und $\tau = (1\ 2)$. Dann ist nach Lemma 1.8

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (2\ 3), \quad \sigma^2\tau\sigma^{-2} = (3\ 4), \quad \dots, \quad \sigma^{n-2}\tau\sigma^{-(n-2)} = (n-1\ n),$$

also sind $(1\ 2), (2\ 3), \dots, (n-1\ n) \in \langle \tau, \sigma \rangle$, und weil diese Transpositionen nach Teil (1) die S_n erzeugen, gilt das auch für τ und σ .

- (3) Seien $\tau = (i\ j)$ die Transposition und σ der p -Zykel. Es gibt $k \geq 0$ mit $\sigma^k(i) = j$. Da $i \neq j$ ist, ist σ^k wieder ein p -Zykel (hier benutzen wir, dass p eine Primzahl ist: Die Ordnung jeder Potenz eines m -Zykels ist ein Teiler von m , in unserem Fall also 1 oder p) und es gilt $\langle \sigma^k \rangle = \langle \sigma \rangle$ und damit auch $\langle \tau, \sigma \rangle = \langle \tau, \sigma^k \rangle$. Es ist $\sigma^k = (i\ j \dots)$; es gibt dann $\rho \in S_p$ mit

$$\rho\sigma^k\rho^{-1} = (1\ 2 \dots p) \quad \text{und} \quad \rho\tau\rho^{-1} = (1\ 2).$$

Nach Teil (2) ist $\langle \rho\tau\rho^{-1}, \rho\sigma^k\rho^{-1} \rangle = S_p$, also auch

$$\langle \tau, \sigma \rangle = \langle \tau, \sigma^k \rangle = \rho^{-1}S_p\rho = S_p. \quad \square$$

Aussage (3) ist für zusammengesetztes n im Allgemeinen falsch (Übung).

1.11. Beispiel. Nach Teil (1) von Satz 1.10 ist jede Permutation ein Produkt von Transpositionen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} (1\ 2\ 3) &= (1\ 2)(2\ 3) \\ (1\ 2\ 3\ 4) &= (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4) \\ &\vdots \\ (1\ 2 \dots n) &= (1\ 2)(2\ 3) \cdots (n-1\ n) \end{aligned}$$

Da Transpositionen τ ungerade Permutationen sind (also $\text{sign}(\tau) = -1$) folgt (fieserweise), dass m -Zykel ζ für gerades m *ungerade* und für ungerades m *gerade* sind: $\text{sign}(\zeta) = (-1)^{m-1}$. Zum Beispiel sind 3-Zykel gerade, also Elemente der A_n . Allgemeiner ist eine Permutation genau dann gerade, wenn in ihrer Zykelzerlegung eine gerade Anzahl von Zykeln gerader Länge vorkommt. ♣

BSP
Zykel als
Produkt von
Trans-
positionen



2. OPERATIONEN VON GRUPPEN AUF MENGEN

Gruppen sind nicht nur an sich wichtig, weil sie interessante algebraische Strukturen darstellen, sondern auch, weil sie häufig auch noch „etwas tun“. Die im letzten Semester als Beispiel erwähnten Automorphismen- und Symmetriegruppen eines Objekts X (eines Vektorraums, eines Rings, einer Gruppe, eines Graphen ...) zum Beispiel haben bereits definitionsgemäß die Eigenschaft, dass ihre Elemente Abbildungen $X \rightarrow X$ sind, also mit den Elementen von X „etwas tun“. Dies kann man etwas allgemeiner fassen und gelangt dann zum Konzept der Operation (auch als „Wirkung“ bezeichnet, engl. *action*) einer Gruppe auf einer Menge (die evtl. noch eine Zusatzstruktur hat).

* **2.1. Definition.** Seien G eine Gruppe und X eine Menge. Eine *Operation* (von links) von G auf X ist eine Abbildung $m: G \times X \rightarrow X$, so dass für alle $x \in X$ und $g, g' \in G$ gilt **DEF**
Operation

$$m(1_G, x) = x \quad \text{und} \quad m(gg', x) = m(g, m(g', x)).$$

Meistens schreibt man $g \cdot x$ (oder auch nur gx) für $m(g, x)$; dann lauten die Bedingungen $1_G \cdot x = x$ und $gg' \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$.

Analog kann man Operationen *von rechts* als Abbildungen $X \times G \rightarrow X$ definieren (mit $(x \cdot g) \cdot g' = x \cdot (gg')$). \diamond

Eine Operation m von G auf X ist dasselbe wie ein Gruppenhomomorphismus $\mu: G \rightarrow S(X)$ von G in die symmetrische Gruppe von X :

2.2. Lemma. Seien G eine Gruppe und X eine Menge. Die Abbildungen **LEMMA**
Operation
ist Homom.
nach $S(X)$

$$\{m: G \times X \rightarrow X \mid m \text{ ist Operation}\} \longleftrightarrow \{\mu: G \rightarrow S(X) \mid \mu \text{ Homomorphismus}\}$$

$$m \longmapsto (g \mapsto (x \mapsto m(g, x)))$$

$$((g, x) \mapsto (\mu(g))(x)) \longleftarrow \mu$$

sind zueinander inverse Bijektionen.

Ist X eine Menge mit Struktur, zum Beispiel ein Vektorraum, ein Ring, eine Gruppe, ein metrischer Raum ..., und ist das Bild von μ enthalten in der entsprechenden Automorphismengruppe, dann sagt man, G operiere auf dem Vektorraum, Ring, der Gruppe, dem metrischen Raum X ..., oder G operiere auf X durch lineare Abbildungen, Ringautomorphismen, Gruppenautomorphismen, Isometrien ...

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die beiden Abbildungen wohldefiniert sind (also das Bild von m ein Homomorphismus und das Bild von μ eine Operation ist).

Sei $m: G \times X \rightarrow X$ eine Operation von G auf X . Für $g \in G$ schreiben wir $\mu(g)$ für die Abbildung $X \rightarrow X$, $x \mapsto m(g, x)$. Dann gilt für $g, g' \in G$ und $x \in X$:

$$\mu(gg')(x) = m(gg', x) = m(g, m(g', x)) = \mu(g)(\mu(g')(x)) = (\mu(g) \circ \mu(g'))(x),$$

also ist $\mu(gg') = \mu(g) \circ \mu(g')$. Da außerdem $\mu(1_G)(x) = m(1_G, x) = x$ ist, gilt $\mu(1_G) = \text{id}_X$. Es folgt $\mu(g) \in S(X)$, denn $\mu(g^{-1}) \circ \mu(g) = \text{id}_X = \mu(g) \circ \mu(g^{-1})$. Insgesamt sehen wir, dass das Bild von m , nämlich $\mu: g \mapsto \mu(g)$, tatsächlich ein Homomorphismus $G \rightarrow S(X)$ ist.

Sei jetzt $\mu: G \rightarrow S(X)$ ein Homomorphismus und $m: G \times X \rightarrow X$ definiert durch $m(g, x) = \mu(g)(x)$. Dann gilt $m(1_G, x) = \mu(1_G)(x) = \text{id}_X(x) = x$ und

$$m(g, m(g', x)) = \mu(g)(\mu(g')(x)) = (\mu(g) \circ \mu(g'))(x) = \mu(gg')(x) = m(gg', x),$$

also ist m eine Operation von G auf X .

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildungen invers zueinander sind. Wir haben

$$m \mapsto (g \mapsto (x \mapsto m(g, x))) \mapsto ((g, x) \mapsto (x \mapsto m(g, x))(x) = m(g, x)) = m$$

und

$$\mu \mapsto ((g, x) \mapsto (\mu(g))(x)) \mapsto (g \mapsto (x \mapsto \mu(g)(x)) = \mu(g)) = \mu$$

wie behauptet. □

2.3. Beispiel. Manche Gruppen operieren in natürlicher Weise auf gewissen Mengen. Zum Beispiel operiert eine Untergruppe G der S_n auf $X = \{1, 2, \dots, n\}$ durch $g \cdot x = g(x)$ — die Elemente von G sind schon von Natur aus Abbildungen $X \rightarrow X$. In analoger Weise operiert eine Untergruppe G von $\text{GL}(n, K)$ (für einen Körper K) in natürlicher Weise auf dem Vektorraum K^n (hier ist $g \cdot x$ die Multiplikation der Matrix g mit dem Spaltenvektor x). ♣

BSP
natürliche
Operationen

Wir führen einige grundlegende Begriffe im Zusammenhang mit Operationen ein.

2.4. Definition. Eine Gruppe G operiere auf einer Menge X . Für $x \in X$ heißt

$$G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

die *Bahn* oder der *Orbit* von x (unter G). Die Kardinalität $\#(G \cdot x)$ heißt auch *Länge* der Bahn. Die Operation heißt *transitiv*, wenn $G \cdot x = X$ gilt (für alle $x \in X$). x heißt *Fixpunkt* von $g \in G$, wenn $g \cdot x = x$ ist; x heißt *Fixpunkt* der Operation, wenn $G \cdot x = \{x\}$ ist (wenn also x Fixpunkt von jedem $g \in G$ ist). Die Menge der Fixpunkte der Operation ist

$$X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x \text{ für alle } g \in G\}.$$

Die Untergruppe (!)

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \leq G$$

heißt der *Stabilisator* oder die *Standgruppe* von x .

Die Relation $x \sim_G y \iff x \in G \cdot y$ ist eine Äquivalenzrelation (!) auf X , deren Äquivalenzklassen gerade die Bahnen sind. Wir bezeichnen mit

$$G \backslash X = \{G \cdot x \mid x \in X\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen (X/G im Falle einer Operation von rechts). ◇

Eine Gruppe G bietet selbst ein reichhaltiges Angebot von möglichen Operationen von (Untergruppen von) G auf diversen Mengen.

2.5. Beispiel. Seien G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Dann operiert U auf G durch *Translation*: $u \cdot g = ug$ (bzw. $g \cdot u = gu$) für $u \in U$ und $g \in G$. Die Bahnen der Operation von links sind gerade die Rechtsnebenklassen, die Bahnen der Operation von rechts sind die Linksnebenklassen bezüglich U . Die Quotientenmenge $U \backslash G$ bzw. G/U entspricht unserer früheren Definition. ♣

BSP
Operation
durch
Translation

Dass hier Links und Rechts nicht so recht zusammenpassen wollen, ist vielleicht etwas verwirrend, wird aber dadurch ausgeglichen, dass G in natürlicher Weise von links auf der Menge der Linksnebenklassen operiert:

2.6. Beispiel. Seien G eine Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Dann operiert G transitiv auf G/U via $g \cdot g'U = (gg')U$. Nach Lemma 2.2 erhalten wir also einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow S(G/U)$. Ist U eine Untergruppe von endlichem Index n , dann kann man $S(G/U)$ mit der symmetrischen Gruppe S_n identifizieren, indem man die Nebenklassen durchnummeriert.

Der Kern des Homomorphismus $G \rightarrow S(G/U)$ besteht aus allen $g \in G$ mit der Eigenschaft, dass für alle $h \in G$ gilt $ghU = hU$, oder äquivalent $g \in hUh^{-1}$. Der Kern ist also $\bigcap_{h \in G} hUh^{-1}$, der größte in U enthaltene Normalteiler von G . Ist dieser trivial (z.B. wenn $U = \{1_G\}$ ist oder wenn $U \neq G$ und G einfach ist), dann hat man G als eine Untergruppe in die symmetrische Gruppe $S(G/U)$ eingebettet. Insbesondere sieht man mit $U = \{1_G\}$ (Satz von Cayley):

Jede endliche Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer (transitiven) Untergruppe von S_n . ♣

Man kann diese Art der Operation auch dazu verwenden, die Aussage, dass eine Untergruppe vom Index 2 immer ein Normalteiler ist, zu verallgemeinern.

2.7. Satz. *Seien G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $\#G$. Ist $U \leq G$ eine Untergruppe vom Index p , dann ist U ein Normalteiler von G .*

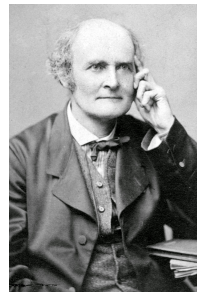
Beweis. Die Operation von G auf G/U liefert einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow S_p$. Sein Kern K ist ein echter Normalteiler von G (denn die Operation ist transitiv und $U \neq G$; der Homomorphismus hat also nichttriviales Bild), dessen Index also > 1 und außerdem ein Teiler von $\#G$ und auch von $\#S_p = p!$ sein muss (nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist $(G : K) = \#\text{im}(\phi)$). Da p der kleinste Primteiler von $\#G$ ist, gilt $\text{ggT}(\#G, p!) = p$, also ist der Index genau p . K ist außerdem in U enthalten, da U der Stabilisator der trivialen Nebenklasse $U \in G/U$ ist (K ist der Durchschnitt aller Stabilisatoren). Es bleibt wegen $(G : U) = p$ nur die Möglichkeit, dass $K = U$ ist (denn $K \subset U$ und $\#K = \#G/p = \#U$), also ist U als Kern eines Homomorphismus ein Normalteiler. □

2.8. Beispiel. Jede Gruppe G operiert auf sich selbst durch Gruppenautomorphismen via $g \mapsto c_g$, also $g \cdot x = c_g(x) = gxg^{-1}$ (Operation „durch Konjugation“). Die Bahnen dieser Operation heißen die *Konjugationsklassen* von G . Der Kern des Homomorphismus $G \rightarrow \text{Aut}(G)$, $g \mapsto c_g$, ist gerade das Zentrum $Z(G)$ von G , wie wir in der „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“ gesehen haben. Der Stabilisator von $x \in G$ unter dieser Operation heißt der *Zentralisator* $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$ von x in G .

Auf analoge Weise operiert G auf der Menge aller Untergruppen von G (auch auf der Menge aller Untergruppen von fester Ordnung oder festem Index) via $g \cdot U = gUg^{-1}$. Die Bahnen heißen wieder *Konjugationsklassen* (von Untergruppen). Eine Untergruppe U ist genau dann ein Fixpunkt dieser Operation, wenn U ein Normalteiler von G ist. Der Stabilisator von U unter dieser Operation heißt der *Normalisator* $N_G(U) = \{g \in G \mid gU = Ug\}$ von U in G . U ist ein Normalteiler in $N_G(U)$, und $N_G(U)$ ist die größte Untergruppe von G mit dieser Eigenschaft (Übung). ♣

Wir beweisen jetzt eine einfache, aber grundlegende Tatsache.

BSP
Operation
auf G/U



A. Cayley
1821–1895

SATZ
Normalteiler
von kleinem
Index

BSP
Operation
durch
Konjugation
DEF
Konjugations-
klasse
Zentralisator

DEF
Normalisator

2.9. Lemma. Die Gruppe G operiere auf der Menge X ; $x \in X$ sei ein Element. Dann ist die Abbildung

$$G/G_x \longrightarrow G \cdot x, \quad gG_x \longmapsto g \cdot x$$

(wohldefiniert und) eine Bijektion. Insbesondere gelten die Relationen

$$\#(G \cdot x) = (G : G_x) \quad \text{und} \quad \#G_x \#(G \cdot x) = \#G.$$

LEMMA
Bahn und
Stabilisator

Beweis. Wir zeigen, dass die Abbildung wohldefiniert ist: Es gelte $gG_x = g'G_x$, also $g = g'h$ mit $h \in G_x$. Dann ist $g \cdot x = g'h \cdot x = g' \cdot (h \cdot x) = g' \cdot x$, weil $h \cdot x = x$ ist.

Die Abbildung ist offensichtlich surjektiv (jedes Element von $G \cdot x$ hat die Form $g \cdot x$). Wir zeigen, dass sie auch injektiv ist: Seien $gG_x, g'G_x \in G/G_x$ mit $g \cdot x = g' \cdot x$. Dann folgt

$$x = 1_G \cdot x = (g^{-1}g) \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot (g' \cdot x) = (g^{-1}g') \cdot x,$$

also ist $g^{-1}g' \in G_x$ und damit $gG_x = g'G_x$.

Die angegebenen Gleichheiten erhält man durch Vergleich der Kardinalitäten und mit dem Satz von Lagrange. □

Der Zusammenhang zwischen den Stabilisatoren verschiedener Elemente von X in derselben Bahn wird durch folgendes Lemma hergestellt.

2.10. Lemma. Die Gruppe G operiere auf der Menge X ; es seien $x \in X$ und $g \in G$. Dann gilt $G_{g \cdot x} = gG_xg^{-1}$.

LEMMA
Stabilisator
von $g \cdot x$

Beweis. Für $h \in G$ gilt

$$h \cdot (g \cdot x) = g \cdot x \iff g^{-1}hg \cdot x = x \iff g^{-1}hg \in G_x \iff h \in gG_xg^{-1}. \quad \square$$

*** 2.11. Folgerung.** Die endliche Gruppe G operiere auf der endlichen Menge X . Dann gilt

$$\#X = \#X^G + \sum_{G \cdot x \in G \setminus X, \#(G \cdot x) \geq 2} (G : G_x).$$

FOLG
Bahnen-
gleichung

Dabei sind alle Terme $(G : G_x)$ in der Summe Teiler der Ordnung von G .

In der Summe läuft x über ein Repräsentantensystem der Bahnen in $X \setminus X^G$.

Beweis. Wir schreiben $\#X$ als Summe aller Kardinalitäten $\#(G \cdot x)$ der Bahnen. Die Bahnen der Länge 1 ergeben gerade die Fixpunkte X^G ; für die übrigen verwenden wir die Relation $\#(G \cdot x) = (G : G_x)$ aus Lemma 2.9. Dass $(G : G_x)$ ein Teiler von $\#G$ ist, folgt aus dem Satz von Lagrange. □

Diese harmlos erscheinende Relation hat interessante Anwendungen.

2.12. Definition. Sei p eine Primzahl. Eine endliche Gruppe G heißt eine p -Gruppe, wenn G nicht trivial ist und die Ordnung $\#G$ eine Potenz von p ist. ◇

DEF
 p -Gruppe

2.13. Folgerung. Sei G eine p -Gruppe, die auf der endlichen Menge X operiert.

FOLG
Operation
einer
 p -Gruppe

- (1) Ist p kein Teiler von $\#X$, dann hat G Fixpunkte in X .
- (2) Ist p ein Teiler von $\#X$ und ist $X^G \neq \emptyset$, dann ist $\#X^G \geq p$.

Beweis. Ist $U \leq G$ eine Untergruppe mit $U \neq G$, dann muss der Index $(G : U)$ ein Vielfaches (sogar eine Potenz) von p sein. Aus der Relation in Folgerung 2.11 ergibt sich also die Kongruenz $\#X \equiv \#X^G \pmod p$. Daraus folgen sofort die beiden Behauptungen. \square

2.14. Beispiel. Seien G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl mit $p \mid \#G$. Der Satz von Cauchy besagt dann, dass es in G (mindestens) ein Element der Ordnung p gibt. Der Beweis kann durch Betrachtung der Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf G^p durch „Rotation“ geführt werden: Der Erzeuger von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bewirkt die Permutation

BSP
Satz von
Cauchy

$$(g_1, g_2, \dots, g_p) \mapsto (g_2, g_3, \dots, g_p, g_1).$$

Diese Operation kann auf die Teilmenge M der p -Tupel mit $g_1 g_2 \cdots g_p = 1_G$ eingeschränkt werden (denn aus $g_1 g_2 \cdots g_p = 1_G$ folgt $g_2 \cdots g_n g_1 = g_1^{-1} (g_1 \cdots g_n) g_1 = g_1^{-1} g_1 = 1_G$). Diese Menge M hat durch p teilbare Kardinalität $\#M = (\#G)^{p-1}$, und es gibt jedenfalls den Fixpunkt $(1_G, 1_G, \dots, 1_G) \in M$. Nach Folgerung 2.13 gibt es also noch (mindestens $p - 1$) weitere Fixpunkte. Diese sind von der Form (g, g, \dots, g) mit $g^p = 1_G$ und $g \neq 1_G$, liefern also Elemente der Ordnung p in G . \clubsuit

2.15. Beispiel. Als weiteres Beispiel hier ein Beweis des kleinen Satzes von Fermat: $a^p \equiv a \pmod p$ für Primzahlen p und ganze Zahlen a . Wir beweisen das hier für $a > 0$ (was natürlich reicht, da es nur auf die Restklasse von a modulo p ankommt). Dazu lassen wir die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ wie in Beispiel 2.14 durch „Rotation“ auf der Menge $X = \{1, 2, \dots, a\}^p$ operieren. Fixpunkte sind wie eben die Tupel, die p -mal dasselbe Element enthalten, also gilt $a^p = \#X \equiv \#X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = a \pmod p$. \clubsuit

BSP
kleiner
Satz von
Fermat

2.16. Beispiel. Im Fall der Operation einer endlichen Gruppe G auf sich durch Konjugation heißt die Bahngleichung auch *Klassengleichung*. Wenn wir $\mathcal{C}(G)$ für ein Repräsentantensystem der Konjugationsklassen außerhalb des Zentrums von G schreiben, dann lautet sie

BSP
Klassen-
gleichung

$$\#Z(G) + \sum_{g \in \mathcal{C}(G)} (G : C_G(g)) = \#G.$$

Man beachte, dass die Elemente des Zentrums hier gerade die Fixpunkte der Operation sind. \clubsuit

Es ergibt sich daraus eine interessante Strukturaussage über p -Gruppen.

2.17. Folgerung. *Sei G eine p -Gruppe. Dann ist das Zentrum $Z(G)$ nicht trivial. Insbesondere ist eine p -Gruppe genau dann einfach, wenn sie Ordnung p hat.*

FOLG
Zentrum
einer
 p -Gruppe

Beweis. Wir betrachten die Operation von G durch Konjugation auf sich selbst. Dann ist $\#X = \#G$ durch p teilbar, und 1_G ist ein Fixpunkt, also hat die Menge der Fixpunkte mindestens p Elemente. Die Fixpunktmenge ist aber gerade das Zentrum $Z(G)$. Da $Z(G) \triangleleft G$, gilt $Z(G) = G$, wenn G einfach ist. Dann ist G aber abelsch, muss also Ordnung p haben (die abelschen einfachen Gruppen sind gerade die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung). \square

2.18. Lemma. *Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Ist $G/Z(G)$ zyklisch, dann ist G abelsch (also ist $G/Z(G)$ dann sogar trivial).*

LEMMA
 $G/Z(G)$ nicht
zyklisch

Beweis. Sei $a \in G$ ein Element, dessen Bild $aZ(G)$ in $G/Z(G)$ die Faktorgruppe erzeugt. Ist $g \in G$ beliebig, dann gibt es $n \in \mathbb{Z}$, sodass $gZ(G) = a^n Z(G)$ ist, also können wir schreiben $g = a^n z$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in Z(G)$. Ist $h = a^m z'$ ein weiteres Element von G (mit $m \in \mathbb{Z}$ und $z' \in Z(G)$), dann ist

$$gh = a^n z a^m z' = a^n a^m z z' = a^m a^n z' z = a^m z' a^n z = hg,$$

also ist G abelsch. \square

2.19. Folgerung. *Sei p eine Primzahl. Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch. Damit gilt $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

FOLG
Gruppen der
Ordnung p^2

Beweis. Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^2$. Nach Folgerung 2.17 ist $Z(G)$ nicht trivial, also gilt entweder $\#Z(G) = p$ oder $\#Z(G) = p^2$. Im zweiten Fall ist $Z(G) = G$, also G abelsch. Im ersten Fall ist $G/Z(G)$ eine Gruppe der Ordnung p , also zyklisch. Nach Lemma 2.18 ist G dann ebenfalls abelsch (bzw. dieser Fall tritt nicht auf). Die letzte Aussage folgt dann aus dem Klassifikationssatz für endliche abelsche Gruppen. \square

3. DIE SÄTZE VON SYLOW

Wir werden jetzt Operationen einer endlichen Gruppe auf verschiedenen aus dieser Gruppe konstruierten Mengen benutzen, um einige wichtige Aussagen über ihre Struktur zu beweisen. Und zwar geht es um die Existenz und Eigenschaften von Untergruppen von Primzahlpotenzordnung. Ist d ein beliebiger Teiler der Gruppenordnung, dann muss es nicht unbedingt eine Untergruppe der Ordnung d geben (z.B. hat die alternierende Gruppe A_4 der Ordnung 12 keine Untergruppe der Ordnung 6). Ist d aber eine Primzahlpotenz, dann kann man die Existenz (und mehr) beweisen. Diese Resultate gehen auf den norwegischen Mathematiker **Peter Ludwig Mejdell Sylow** zurück.



P.L.M. Sylow
1832–1918

Seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und $e \geq 1$ mit $p^e \mid \#G$. Sei weiter \mathcal{T} die Menge, deren Elemente alle Teilmengen $M \subset G$ mit $\#M = p^e$ sind. Auf \mathcal{T} operiert G durch Translation von links: $g \cdot M = gM = \{gm \mid m \in M\}$.

Die interessierenden Bahnen sind jetzt nicht die Fixpunkte, aber insoweit damit verwandt, als es die Bahnen sind, deren Elemente die größten Stabilisatoren haben.

3.1. Lemma. *Sei $M \in \mathcal{T}$ und sei $G_M = \{g \in G \mid gM = M\}$ der Stabilisator von M . Dann gilt:*

- (1) *M ist disjunkte Vereinigung von Rechtsnebenklassen bezüglich G_M .*
- (2) *$\#G_M \mid p^e$.*
- (3) *M ist genau dann eine Rechtsnebenklasse bezüglich einer Untergruppe U von G , wenn G_M Ordnung p^e hat. In diesem Fall ist $U = G_M$, und alle Mengen gM in der Bahn von M sind Rechtsnebenklassen bezüglich einer Untergruppe.*
- (4) *Jede Bahn, deren Elemente Rechtsnebenklassen sind, enthält genau eine Untergruppe von G .*

LEMMA
Hilfsaussagen
für 1. Satz
von Sylow

Beweis.

- (1) Der Stabilisator G_M operiert auf M durch Translation von links. M zerfällt also in Bahnen bezüglich dieser Operation; diese Bahnen haben die Form $G_M g$ (mit $g \in M$), sind also Rechtsnebenklassen bezüglich G_M .
- (2) Da die Rechtsnebenklassen von G_M alle dieselbe Mächtigkeit $\#G_M$ haben, folgt aus Teil (1), dass $\#G_M$ ein Teiler von $\#M = p^e$ sein muss.
- (3) Gilt $\#G_M = p^e$, dann ist M eine Rechtsnebenklasse bezüglich G_M nach Teil (1), denn die Anzahl der Rechtsnebenklassen bezüglich G_M in M ist gegeben durch $p^e / \#G_M$.
Gilt umgekehrt $M = Ug$ mit einer Untergruppe $U \leq G$, dann ist $U \subset G_M$, und es folgt mit Teil (2) $p^e = \#M = \#U \mid \#G_M \mid p^e$, also $\#G_M = p^e$ und $U = G_M$.
Hat der Stabilisator G_M von M Ordnung p^e , dann gilt das auch für den Stabilisator $G_{gM} = gG_M g^{-1}$ (siehe Lemma 2.10) jeder anderen Menge gM in der Bahn von M . Damit ist auch gM eine Rechtsnebenklasse (bezüglich $gG_M g^{-1}$).
- (4) Die Bahn enthalte die Rechtsnebenklasse Ug bezüglich der Untergruppe U ; dann enthält die Bahn die Untergruppe $U' = g^{-1}Ug \leq G$. Die Bahn besteht dann genau aus den Linksnebenklassen bezüglich U' ; U' selbst ist die einzige Linksnebenklasse, die eine Untergruppe ist. \square

Wir schreiben $\#G = kp^e$ mit $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Wir wenden die Bahnengleichung 2.11 auf die Operation von G auf \mathcal{T} an:

$$\binom{kp^e}{p^e} = \#\mathcal{T} = \sum_{j \in J} (G : G_{M_j}),$$

wobei $(M_j)_{j \in J}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen ist. Nach Teil (2) von Lemma 3.1 ist $\#G_{M_j}$ ein Teiler von p^e ; es folgt $(G : G_{M_j}) = \#G/\#G_{M_j} = kp^f$ mit $f \geq 0$ und damit (unter Verwendung von Teil (3) und (4) von Lemma 3.1)

$$\binom{kp^e}{p^e} = k(\#\{j \in J \mid \#G_{M_j} = p^e\} + p\ell(G)) = k(\#\{U \leq G \mid \#U = p^e\} + p\ell(G))$$

mit einer ganzen Zahl $\ell(G)$. Ist G' die zyklische Gruppe der Ordnung kp^e , dann gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung p^e (das gilt für jeden Teiler der Gruppenordnung; diese Aussage war eine Übungsaufgabe in der „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“), also gilt in diesem Fall

$$\binom{kp^e}{p^e} = k(1 + p\ell(G')).$$

Wir setzen das oben ein und teilen durch k ; das liefert

$$\#\{U \leq G \mid \#U = p^e\} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Wir haben also folgenden Satz bewiesen, der den Satz von Cauchy (Beispiel 2.14) verallgemeinert. (Dieser Beweis stammt von Frobenius.)



F.G. Frobenius
1849–1917

* **3.2. Satz.** Seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und p^e ein Teiler von $\#G$. Dann ist die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung p^e von der Form $1 + lp$ mit $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Insbesondere gibt es stets solche Untergruppen.

SATZ
1. Satz
von Sylow

* **3.3. Definition.** Seien G eine endliche Gruppe und p ein Primteiler von $\#G$. Eine Untergruppe $U \leq G$ heißt p -Untergruppe von G , wenn $\#U = p^e$ ist mit $e \geq 1$. U heißt p -Sylowgruppe von G , wenn e maximal ist, also wenn $\#G = kp^e$ ist mit $p \nmid k$. \diamond

DEF
 p -Sylow-
gruppe

Der 1. Satz von Sylow sagt also, dass es zu jeder möglichen Ordnung auch (mindestens) eine p -Untergruppe gibt; insbesondere gibt es stets wenigstens eine p -Sylowgruppe. Wir zeigen jetzt eine schärfere Aussage.

* **3.4. Satz.** Seien G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $\#G$, S eine p -Sylowgruppe von G und $U \leq G$ eine p -Untergruppe. Dann gibt es $g \in G$, so dass $U \subset gSg^{-1}$ ist. Insbesondere sind je zwei p -Sylowgruppen von G zueinander konjugiert, und S ist genau dann ein Normalteiler von G , wenn S die einzige p -Sylowgruppe von G ist.

SATZ
2. Satz
von Sylow

Beweis. Diesmal lassen wir G (und damit U) auf der Menge $G/S = \{gS \mid g \in G\}$ der Linksnebenklassen von S durch Linkstranslation operieren: $h \cdot gS = (hg)S$. Weil S eine p -Sylowgruppe von G ist, ist $\#(G/S) = \#G/\#S$ nicht durch p teilbar. Auf der anderen Seite ist U eine p -Gruppe. Nach Folgerung 2.13 hat die Operation von U auf G/S einen Fixpunkt gS . Das bedeutet $ugS = gS$ und damit $u \in gSg^{-1}$ für alle $u \in U$, also $U \subset gSg^{-1}$.

Wenden wir das Ergebnis auf eine weitere p -Sylowgruppe S' von G an, dann folgt $S' \subset gSg^{-1}$ für ein geeignetes $g \in G$. Da beide Seiten dieselbe Ordnung

haben, muss Gleichheit gelten, also sind S und S' zueinander konjugiert. Die Konjugationsklasse von S besteht also genau aus den p -Sylowgruppen von G . Eine Untergruppe ist genau dann ein Normalteiler, wenn sie das einzige Element in ihrer Konjugationsklasse ist; das zeigt die letzte Aussage im Satz. \square

Als letzte Aussage der „Sätze von Sylow“ haben wir noch Einschränkungen für die mögliche Anzahl der p -Sylowgruppen.

* **3.5. Satz.** *Seien G eine endliche Gruppe und p ein Primteiler von $\#G$. Wir schreiben $\#G = kp^e$ mit $p \nmid k$. Dann gilt für die Anzahl s_p der p -Sylowgruppen von G :*

$$s_p \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{und} \quad s_p \mid k.$$

SATZ
3. Satz
von Sylow

Beweis. Die erste Aussage $s_p \equiv 1 \pmod{p}$ ist ein Spezialfall des 1. Satzes von Sylow 3.2. Für die zweite Aussage betrachten wir die Operation von G durch Konjugation auf der Menge der p -Sylowgruppen von G : $g \cdot S = gSg^{-1}$. Nach Satz 3.4 ist die Operation transitiv. Die Anzahl s_p ist also gleich der Länge der (einzigen) Bahn und muss demnach ein Teiler von $\#G$ sein. Da nach der ersten Aussage p kein Teiler von s_p ist, folgt $s_p \mid k$. \square

Man kann die zweite Aussage auch direkt ohne Rückgriff auf die erste beweisen, indem man bemerkt, dass der Stabilisator $N_G(S)$ von S unter der Operation durch Konjugation S enthält. Es folgt $s_p = (G : N_G(S)) \mid (G : S) = k$.

Man kann die Sätze von Sylow dazu benutzen, Strukturaussagen über endliche Gruppen zu gewinnen und zum Beispiel die Gruppen vorgegebener Ordnung bis auf Isomorphie zu klassifizieren. Wir werden dazu gleich ein Beispiel betrachten. Vorher brauchen wir noch eine Hilfsaussage.

3.6. Lemma. *Sei G eine Gruppe und seien N und N' zwei Normalteiler von G mit $N \cap N' = \{1_G\}$. Dann gilt für alle $n \in N$ und $n' \in N'$, dass $nn' = n'n$ ist.*

LEMMA
Produkt von
Normalteilern

Beweis. Wir betrachten den *Kommutator* $[n, n'] = nn'n^{-1}n'^{-1}$. Es gilt

$$[n, n'] = (nn'n^{-1})n'^{-1} \in (nN'n^{-1})N' = N'N' = N' \quad \text{und}$$

$$[n, n'] = n(n'n^{-1}n'^{-1}) \in N(n'Nn'^{-1}) = NN = N,$$

also $[n, n'] \in N \cap N' = \{1_G\}$ und damit $nn'n^{-1}n'^{-1} = 1$. Multiplikation mit $n'n$ von rechts liefert $nn' = n'n$. \square

DEF
Kommutator

Wir erinnern uns an die Definition des direkten Produkts von Gruppen:

3.7. Definition. Sei $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie von Gruppen. Das kartesische Produkt $G = \prod_{i \in I} G_i$ wird zu einer Gruppe, wenn wir die Verknüpfung komponentenweise definieren:

$$(g_i)_{i \in I} \cdot (h_i)_{i \in I} = (g_i \cdot h_i)_{i \in I}$$

Die Gruppe G mit dieser Verknüpfung heißt das *direkte Produkt* der Gruppen G_i .

Ist $I = \{1, 2, \dots, n\}$ endlich, dann schreiben wir auch $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ für das direkte Produkt. \diamond

DEF
direktes
Produkt von
Gruppen

3.8. Lemma. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $\#G = p^e q^f$ mit Primzahlen $p \neq q$ und $e, f \geq 1$. G besitze genau eine p -Sylowgruppe S_p und genau eine q -Sylowgruppe S_q . Dann ist $\phi: S_p \times S_q \rightarrow G$, $(s, s') \mapsto ss'$ ein Isomorphismus.

LEMMA
Produkt von
Sylowgruppen

Beweis. Nach Satz 3.4 sind S_p und S_q Normalteiler von G . Da die Ordnungen von S_p und S_q teilerfremd sind, muss $S_p \cap S_q = \{1_G\}$ gelten. Nach Lemma 3.6 gilt also $ss' = s's$ für alle $s \in S_p$ und $s' \in S_q$. Daraus folgt, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist, denn für $s_1, s_2 \in S_p$, $s'_1, s'_2 \in S_q$ gilt

$$\phi((s_1, s'_1)(s_2, s'_2)) = \phi(s_1 s_2, s'_1 s'_2) = (s_1 s_2)(s'_1 s'_2) = (s_1 s'_1)(s_2 s'_2) = \phi(s_1, s'_1)\phi(s_2, s'_2).$$

Der Kern von ϕ ist trivial, denn aus $ss' = 1_G$ folgt $s = s'^{-1} \in S_p \cap S_q = \{1_G\}$, also $(s, s') = (1, 1)$. Es folgt, dass ϕ injektiv ist. Da Quelle und Ziel von ϕ dieselbe Mächtigkeit haben, muss ϕ auch surjektiv sein. \square

Man kann das verallgemeinern:

Sei G eine endliche Gruppe. Gibt es zu jedem Primteiler p von $\#G$ genau eine p -Sylowgruppe S_p von G , dann ist G isomorph zum direkten Produkt der Gruppen S_p .

(Beweis als Übung.)

Es folgt das versprochene Anwendungsbeispiel für die Sätze von Sylow.

3.9. Satz. Seien $p < q$ Primzahlen mit $p \nmid q - 1$. Dann ist jede Gruppe G mit $\#G = pq$ zyklisch.

SATZ
Gruppen der
Ordnung pq

Beweis. Seien s_p und s_q die Anzahlen der p - und q -Sylowgruppen von G . Nach Satz 3.5 gilt dann $s_p \mid q$ und $s_p \equiv 1 \pmod{p}$. Da $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, ist $s_p = 1$ die einzige Möglichkeit. Ebenso gilt $s_q \mid p$ und $s_q \equiv 1 \pmod{q}$; wegen $q > p$ muss $s_q = 1$ sein. Nach Lemma 3.8 ist G isomorph zum Produkt seiner p - und seiner q -Sylowgruppe. Diese Gruppen sind zyklisch (da von Primzahlordnung); nach dem Chinesischen Restsatz ist die direkte Summe isomorph zur zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$. \square

Im nächsten Abschnitt werden wir die Gruppen der Ordnung pq vollständig klassifizieren.

4. SEMIDIREKTE PRODUKTE

Man kann die Gruppen der Ordnung pq ganz allgemein klassifizieren. Dazu braucht man die Konstruktion des *semidirekten Produkts*.

Aus Ergebnissen des letzten Abschnitts kann man Folgendes schließen:

Ist G eine Gruppe mit Normalteilern N, N' , sodass $G = NN'$ und $N \cap N' = \{1_G\}$ gilt, dann ist $G \cong N \times N'$.

Wir schwächen die Voraussetzungen jetzt dahingehend ab, dass nur noch eine der beiden Untergruppen ein Normalteiler sein muss.

4.1. Lemma. Sei G eine Gruppe mit einer Untergruppe U und einem Normalteiler N mit den Eigenschaften $G = NU$ und $N \cap U = \{1_G\}$. Dann ist die Abbildung $\phi: N \times U \rightarrow G$, $(n, u) \mapsto nu$, bijektiv. Auf $N \times U$ wird durch die Verknüpfung

$$(n, u) \cdot (n', u') = (n \cdot un'u^{-1}, uu')$$

eine Gruppenstruktur definiert, bezüglich derer ϕ ein Isomorphismus ist.

LEMMA
 $G = NU$

Beweis. Aus $G = NU = \{nu \mid n \in N, u \in U\}$ folgt, dass ϕ surjektiv ist. Aus $\phi(n, u) = \phi(n', u')$, also $nu = n'u'$, folgt $N \ni n'^{-1}n = u'u^{-1} \in U$; $N \cap U = \{1_G\}$ impliziert dann $n'^{-1}n = u'u^{-1} = 1_G$, was $n = n'$ und $u = u'$ bedeutet. Das zeigt, dass ϕ auch injektiv ist.

Wegen $nu \cdot n'u' = n(un'u^{-1}) \cdot uu'$ ist $(n, u) \cdot (n', u') = \phi^{-1}(\phi(n, u) \cdot \phi(n', u'))$. Dass dies eine Gruppenstruktur auf $N \times U$ definiert, folgt daraus, dass ϕ bijektiv und G eine Gruppe ist; es ergibt sich auch unmittelbar, dass ϕ ein Isomorphismus ist. (Beachte, dass $un'u^{-1} \in N$ ist wegen $N \triangleleft G$.) \square

Umgekehrt kann man zu Gruppen N und U und einer Operation von U auf N durch Gruppenautomorphismen (wie eben durch $u * n = un u^{-1}$) auf $N \times U$ eine Gruppenstruktur definieren, sodass die resultierende Gruppe G zu N und U isomorphe Untergruppen $N' = N \times \{1_U\}$ und $U' = \{1_N\} \times U$ hat, wobei N' ein Normalteiler ist und die Operation durch Konjugation von U' auf N' der gegebenen Operation von U auf N entspricht.

4.2. Lemma. Seien N und U Gruppen und $\varphi: U \times N \rightarrow N$, $(u, n) \mapsto u * n$, sei eine Operation von U auf N durch Gruppenautomorphismen. Dann definiert

$$(n, u) \cdot (n', u') = (n \cdot (u * n'), uu')$$

eine Gruppenstruktur auf $N \times U$. Sei G die resultierende Gruppe. Dann sind $\phi_N: N \rightarrow G$, $n \mapsto (n, 1_U)$, und $\phi_U: U \rightarrow G$, $u \mapsto (1_N, u)$, injektive Gruppenhomomorphismen, sodass $N' = \text{im}(\phi_N) = N \times \{1_U\}$ ein Normalteiler von G ist und $\phi_U(u)\phi_N(n)\phi_U(u)^{-1} = \phi_N(u * n)$ für alle $n \in N$ und $u \in U$ gilt.

LEMMA
semi-
direktes
Produkt

Beweis. Wir prüfen die Gruppenaxiome nach. Die Assoziativität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (n_1, u_1) \cdot ((n_2, u_2) \cdot (n_3, u_3)) &= (n_1, u_1) \cdot (n_2 \cdot (u_2 * n_3), u_2 u_3) \\ &= (n_1 \cdot u_1 * (n_2 \cdot (u_2 * n_3)), u_1(u_2 u_3)) \\ &= (n_1 \cdot ((u_1 * n_2) \cdot (u_1 * (u_2 * n_3))), u_1(u_2 u_3)) \\ &= ((n_1 \cdot (u_1 * n_2)) \cdot ((u_1 u_2) * n_3), (u_1 u_2) u_3) \\ &= (n_1 \cdot (u_1 * n_2), u_1 u_2) \cdot (n_3, u_3) \\ &= ((n_1, u_1) \cdot (n_2, u_2)) \cdot (n_3, u_3). \end{aligned}$$

Das neutrale Element ist $(1_N, 1_U)$, denn

$$(1_N, 1_U) \cdot (n, u) = (1_N \cdot (1_U * n), 1_U u) = (n, u)$$

und

$$(n, u) \cdot (1_N, 1_U) = (n \cdot (u * 1_N), u 1_U) = (n, u).$$

Das Inverse zu (n, u) ist $(u^{-1} * n^{-1}, u^{-1})$, denn

$$(n, u) \cdot (u^{-1} * n^{-1}, u^{-1}) = (n \cdot (u * (u^{-1} * n^{-1})), uu^{-1}) = (n \cdot (1_U * n^{-1}), 1_U) = (1_N, 1_U)$$

und

$$(u^{-1} * n^{-1}, u^{-1}) \cdot (n, u) = ((u^{-1} * n^{-1}) \cdot (u^{-1} * n), u^{-1} u) = (u^{-1} * (n^{-1} n), 1_U) = (1_N, 1_U).$$

Dass ϕ_N und ϕ_U injektiv sind, ist klar. Dass es Gruppenhomomorphismen sind, rechnet man leicht nach. $N' = N \times \{1_U\}$ ist ein Normalteiler, denn es gilt

$$(n, u) \cdot (n', 1) \cdot (n, u)^{-1} = (n'', uu^{-1}) = (n'', 1_U)$$

für ein $n'' \in N$. Das Element $\phi_U(u) = (1_N, u)$ operiert durch Konjugation auf $\phi_N(n) = (n, 1_U)$ via

$$(1_N, u) \cdot (n, 1_U) \cdot (1_N, u)^{-1} = (1_N \cdot (u * n) \cdot (u * 1_N), uu^{-1}) = (u * n, 1_U)$$

wie behauptet. □

* **4.3. Definition.** In der Situation von Lemma 4.2 heißt G das *semidirekte Produkt* von N und U bezüglich φ und wird $G = N \rtimes_{\varphi} U$ geschrieben. Ist aus dem Kontext klar, welche Operation φ gemeint ist, schreibt man auch einfach $N \rtimes U$. ◇

DEF
semi-
direktes
Produkt

Damit lässt sich Lemma 4.1 auch so formulieren:

4.4. Lemma. Sei G eine Gruppe mit einem Normalteiler N und einer Untergruppe U mit den Eigenschaften $G = NU$ und $N \cap U = \{1_G\}$. Dann ist G isomorph zum semidirekten Produkt von N und U bezüglich der Operation von U auf N durch Konjugation.

LEMMA
 $G \cong N \rtimes U$

4.5. Beispiel. Die Diedergruppe D_n der Ordnung $2n$ ist isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$, wobei ± 1 auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ durch Multiplikation operiert. Denn D_n enthält eine zyklische Untergruppe C_n der Ordnung n (die Drehungen), die Index 2 hat und deshalb ein Normalteiler ist, und ein Element τ (jede Spiegelung an einer Geraden) der Ordnung 2 mit $\tau \notin C_n$. Es folgt $C_n \cap \langle \tau \rangle = \{\text{id}\}$ und damit auch (wegen $\#C_n \cdot \#\langle \tau \rangle = \#D_n$) $C_n \langle \tau \rangle = D_n$. Für eine Drehung $\sigma \in C_n$ gilt $\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^{-1}$ (das ist äquivalent zu $(\tau \sigma)^2 = \text{id}$, was daraus folgt, dass $\tau \sigma$ eine Spiegelung ist), also ist die Operation von τ auf C_n durch Inversion gegeben. In der zu C_n isomorphen Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ entspricht das der Negation $[a] \mapsto [-a]$. ♣

BSP
Dieder-
gruppe

Wann ist $N \rtimes U$ abelsch?

4.6. Lemma. *Ein semidirektes Produkt $N \rtimes_{\varphi} U$ ist genau dann abelsch, wenn N und U beide abelsch sind und die Operation φ von U auf N trivial ist. In diesem Fall ist $N \rtimes_{\varphi} U = N \times U$.*

LEMMA
 $N \rtimes U$
abelsch

Beweis. Ist φ trivial, dann ist $N \rtimes_{\varphi} U = N \times U$. Es ist dann klar, dass das Produkt genau dann abelsch ist, wenn beide Faktoren abelsch sind. Ist φ nicht trivial, dann gilt $\phi_U(u)\phi_N(n)\phi_U(u)^{-1} \neq \phi_N(n)$ für geeignete $u \in U$ und $n \in N$, damit ist das semidirekte Produkt nicht abelsch. \square

Die Operation φ von U auf N entspricht nach Lemma 2.2 (und dem folgenden Text) einem Gruppenhomomorphismus $U \rightarrow \text{Aut}(N)$. Für Anwendungen ist es daher wichtig, die Struktur von $\text{Aut}(N)$ zu kennen. Wir bestimmen hier die Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe. Dazu finden wir erst einmal heraus, wie die Erzeuger einer gegebenen zyklischen Gruppe aussehen.

4.7. Lemma. *Sei $G = \langle g \rangle$ eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n . Dann hat G genau $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ Erzeuger, nämlich alle g^a mit $0 \leq a < n$ und $a \perp n$.*

LEMMA
Erzeuger
einer
zyklischen
Gruppe

Beweis. Ist $d = \text{ggT}(a, n) > 1$, dann gilt $g^{a \cdot n/d} = g^{\text{kgV}(a, n)} = 1_G$, also ist $\text{ord}(g^a) \leq n/d < n$ und g^a kann kein Erzeuger sein. Die Bedingung $a \perp n$ ist also notwendig. Gilt $a \perp n$, dann gibt es $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \pmod n$; es folgt $(g^a)^b = g$ und damit auch $G \supset \langle g^a \rangle \supset \langle g \rangle = G$ und somit $G = \langle g^a \rangle$. \square

4.8. Lemma. *Sei $G = \langle g \rangle$ zyklisch der Ordnung n . Dann ist*

$$\psi: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times} \longrightarrow \text{Aut}(G), \quad [a] \longmapsto (\gamma \mapsto \gamma^a)$$

ein Gruppenisomorphismus.

LEMMA
 $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

Beweis. Zunächst einmal ist ψ wohldefiniert, denn $\gamma \mapsto \gamma^a$ definiert einen Endomorphismus von G (weil G abelsch ist, gilt $(\gamma_1\gamma_2)^a = \gamma_1^a\gamma_2^a$), der nur von der Restklasse $[a]$ abhängt (denn $\gamma^n = 1_G$) und bijektiv ist (wegen $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ gibt es $b \in \mathbb{Z}$ mit $ab \equiv 1 \pmod n$; dann ist $\gamma \mapsto \gamma^b$ die inverse Abbildung). Wegen $(\psi([ab]))(\gamma) = \gamma^{ab} = (\gamma^b)^a = (\psi([a]) \circ \psi([b]))(\gamma)$ ist ψ ein Homomorphismus. Außerdem ist ψ surjektiv, denn jeder Automorphismus ϕ von G muss g auf einen Erzeuger von G abbilden; dieser hat die Form $\phi(g) = g^a$ mit $a \perp n$, siehe Lemma 4.7. Es folgt $\phi(g^k) = \phi(g)^k = (g^a)^k = (g^k)^a$, also $\phi = \psi([a])$. Für $[a] \neq [1]$ gilt $(\psi([a]))(g) = g^a \neq g$, also $\psi([a]) \neq \text{id}_G$; damit ist ψ auch injektiv. \square

4.9. Beispiel. Es gibt eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2019.

Es ist $2019 = 3 \cdot 673$. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}/673\mathbb{Z}$ hat Ordnung $\varphi(673) = 672$ und enthält eine Untergruppe der Ordnung 3. Es gibt also eine nichttriviale Operation ϕ von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}/673\mathbb{Z}$; damit ist $\mathbb{Z}/673\mathbb{Z} \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung 2019. \clubsuit

BSP
nicht-
abelsche
Gruppe

Wir beweisen hier gleich noch eine allgemeine Aussage über multiplikative Gruppen von Körpern, die uns unter anderem zeigt, dass $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für Primzahlen p zyklisch ist. Dafür beweisen wir erst noch ein Lemma, das zyklische Gruppen charakterisiert.

4.10. Lemma. Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n mit der Eigenschaft, dass es für jeden Teiler d von n höchstens eine Untergruppe von G der Ordnung d gibt. Dann ist G zyklisch.

LEMMA
Charakterisierung
zyklischer
Gruppen

Die Umkehrung gilt auch: Eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n hat zu jedem Teiler d von n genau eine Untergruppe der Ordnung d . (Das war eine Übungsaufgabe in der „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“.) Das hatten wir bereits im Beweis von Satz 3.2 verwendet.

Beweis. Hat $g \in G$ die Ordnung d , dann erzeugt g eine (und damit die einzige) Untergruppe U_d der Ordnung d , die also zyklisch ist und genau $\varphi(d)$ Erzeuger hat; dies sind dann genau die Elemente der Ordnung d in G . Es folgt

$$a_d := \#\{g \in G \mid \text{ord}(g) = d\} = (\varphi(d) \text{ oder } 0) \leq \varphi(d)$$

für alle Teiler d von n . Aus

$$\sum_{d|n} \varphi(d) \geq \sum_{d|n} a_d = \#G = n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

(die letzte Gleichung ist Lemma 7.14 im Skript zur „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“) folgt dann $a_d = \varphi(d)$ für alle $d \mid n$. Insbesondere ist $a_n = \varphi(n) \geq 1$, also gibt es Elemente der Ordnung n in G . So ein Element erzeugt G ; demnach ist G zyklisch. \square

* **4.11. Satz.** Seien K ein Körper und $G \leq K^\times$ endlich. Dann ist G zyklisch. Insbesondere ist für jede Primzahl p die Gruppe $\mathbb{F}_p^\times = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ zyklisch.

SATZ
endliche
Untergruppen
von K^\times

Beweis. Sei $\#G = n$. Dann gilt $g^n = 1$ für jedes $g \in G$. Damit besteht G genau aus den Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ in K (das Polynom hat höchstens n Nullstellen und alle Elemente von G sind Nullstellen). Ist d ein Teiler von n und U eine Untergruppe von G der Ordnung d , dann folgt analog, dass U die Menge der Nullstellen von $X^d - 1$ ist. Es gibt also höchstens eine Untergruppe der Ordnung d . Lemma 4.10 zeigt dann, dass G zyklisch ist.

Ist p eine Primzahl, dann ist $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper. Die Gruppe \mathbb{F}_p^\times ist selbst endlich und damit zyklisch. \square

4.12. Definition. Sei p eine Primzahl. Eine ganze Zahl a , sodass das Bild von a in $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Erzeuger von \mathbb{F}_p^\times ist, heißt eine *Primitivwurzel* modulo p . \diamond

DEF
Primitiv-
wurzel

Nach Lemma 4.7 gibt es also genau $\varphi(p - 1)$ Restklassen modulo p , die Primitivwurzeln modulo p enthalten.

Wir haben gesehen, dass $\text{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(p - 1)\mathbb{Z}$ gilt, wenn p eine Primzahl ist. Was kann man sagen, wenn man p durch eine beliebige positive ganze Zahl n ersetzt?

Sei $n = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ die Primfaktorzerlegung von n . Dann gilt nach dem Chinesischen Restsatz

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong \prod_{j=1}^m (\mathbb{Z}/p_j^{e_j}\mathbb{Z})^\times.$$

Es genügt also den Fall zu betrachten, dass $n = p^e$ eine Primzahlpotenz ist.

Lemma.

LEMMA
 $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$

- (1) Ist p eine ungerade Primzahl und $e \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dann ist $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$ zyklisch der Ordnung $\varphi(p^e) = (p-1)p^{e-1}$.
- (2) Für $e \geq 2$ gilt $(\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{e-2}\mathbb{Z}$.

Beweis. Wir schreiben zur Abkürzung $[a]_e := a + p^e\mathbb{Z}$ für die Restklasse von a modulo p^e (auch für $p = 2$).

- (1) Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine Primitivwurzel modulo p . Es ist $a^{p-1} = 1 + pb$ mit $b \in \mathbb{Z}$. Ist b nicht durch p teilbar, dann ist $[a]_e$ ein Erzeuger von $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$ für alle $e \geq 1$, denn man zeigt leicht durch Induktion, dass $a^{(p-1)p^{m-1}} \equiv 1 + p^m b \pmod{p^{m+1}}$ ist für alle $m \geq 1$; somit gilt (für $e \geq 2$) $[a]_e^{(p-1)p^{e-2}} \not\equiv 1$. Daraus folgt, dass p^{e-1} die Ordnung von $[a]_e$ teilt. Da auch $p-1$ ein Teiler der Ordnung ist (wegen $\text{ord}([a]_1) = p-1$ nach Voraussetzung) und $p-1$ und p^{e-1} teilerfremd sind, folgt $\text{ord}([a]_e) = (p-1)p^{e-1}$.
 Ist b durch p teilbar, dann gilt

$$(a+p)^{p-1} \equiv a^{p-1} + (p-1)a^{p-2}p \equiv 1 - a^{p-2}p \pmod{p^2}.$$

Wegen $p \nmid a^{p-2}$ erfüllt dann $a+p$ die Voraussetzung des obigen Arguments.

- (2) Man zeigt ähnlich wie oben, dass $[5]_e$ Ordnung 2^{e-2} hat. Da $[-1]_e$ Ordnung 2 hat und $[-1]_e \notin \langle [5]_e \rangle$ ist (alle Restklassen im Erzeugnis rechts bestehen aus Zahlen, die $\equiv 1 \pmod{4}$ sind), folgt die Behauptung mit den expliziten Erzeugern $[-1]_e$ von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $[5]_e$ von $\mathbb{Z}/2^{e-2}\mathbb{Z}$. \square

Jetzt können wir die Klassifikation der Gruppen der Ordnung pq abschließen.

4.13. Satz. *Seien $p < q$ Primzahlen und G eine Gruppe der Ordnung pq . Gilt $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, dann ist G zyklisch. Anderenfalls ist G entweder zyklisch oder isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und nicht abelsch, wobei die Operation von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ nichttrivial ist. Alle diese semidirekten Produkte sind isomorph.*

SATZ
 Gruppen der
 Ordnung pq

Beweis. Den Fall $q \not\equiv 1 \pmod{p}$ hatten wir bereits in Satz 3.9 behandelt. Wir können also $q \equiv 1 \pmod{p}$ voraussetzen. Wie im Beweis von Satz 3.9 hat G genau eine Untergruppe N der Ordnung q , die also ein Normalteiler ist. Die Anzahl der Untergruppen von G der Ordnung p ist ein Teiler von q , also entweder 1 oder q . Im ersten Fall ist G wie im Beweis von Satz 3.9 zyklisch. Im zweiten Fall sei U eine Untergruppe der Ordnung p . Da die Ordnungen von N und U teilerfremd sind, muss $N \cap U = \{1_G\}$ sein. Dann ist die Abbildung $N \times U \rightarrow G$, $(n, u) \mapsto nu$, injektiv, und weil beide Seiten dieselbe Kardinalität pq haben, auch surjektiv, also gilt auch $NU = G$. Damit ist G isomorph zu $N \rtimes_{\varphi} U$ mit einer nichttrivialen Operation φ (denn U ist kein Normalteiler, also ist G nicht abelsch). Wir schreiben $\Phi: U \rightarrow \text{Aut}(N) \cong \mathbb{F}_q^\times$ für den zugehörigen Homomorphismus wie in Lemma 2.2. Die Gruppe \mathbb{F}_q^\times ist nach Satz 4.11 zyklisch, hat also genau eine Untergruppe A der Ordnung p . Ist Φ nichttrivial, dann muss Φ injektiv sein mit $\Phi(U) = A$. Je zwei solche Homomorphismen Φ, Φ' erfüllen $\Phi' = \Phi \circ \alpha$ mit $\alpha \in \text{Aut}(U)$; die zugehörigen semidirekten Produkte (φ' sei die Operation, die zu Φ' gehört) sind dann isomorph vermöge

$$N \rtimes_{\varphi'} U \xrightarrow{\text{id} \times \alpha} N \rtimes_{\varphi} U.$$

Denn diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv und auch ein Homomorphismus: (Wir schreiben $(n, u) \cdot_{\varphi} (n', u')$ für die Verknüpfung in $N \rtimes_{\varphi} U$; analog für φ')

$$\begin{aligned} (\text{id} \times \alpha)((n, u) \cdot_{\varphi'} (n', u')) &= (\text{id} \times \alpha)(n \cdot (\Phi'(u))(n'), uu') \\ &= (n \cdot (\Phi(\alpha(u)))(n'), \alpha(uu')) = (n, \alpha(u)) \cdot_{\varphi} (n', \alpha(u')) \\ &= (\text{id} \times \alpha)(n, u) \cdot_{\varphi} (\text{id} \times \alpha)(n', u'). \quad \square \end{aligned}$$

Der Satz besagt also im Fall $q \equiv 1 \pmod p$, dass es genau zwei Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung pq gibt, nämlich die zyklische Gruppe und eine nicht-abelsche Gruppe. Insbesondere sind je zwei nicht-abelsche Gruppen der Ordnung pq isomorph.

4.14. Folgerung. *Seien p eine ungerade Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $2p$. Dann ist G entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe D_p .*

FOLG
$G = 2p$

Beweis. Nach Satz 4.13 (mit $(p, q) := (2, p)$) sind alle nicht-zyklischen Gruppen der Ordnung $2p$ isomorph. Da die Diedergruppe D_p nicht zyklisch ist, folgt die Behauptung. \square

4.15. Beispiel. Damit sind die Gruppen G mit $\#G \leq 15$, $\#G \neq 8, 12$ bis auf Isomorphie klassifiziert:

BSP
Gruppen
kleiner
Ordnung

- Für $\#G = 1$ gibt es nur die triviale Gruppe.
- Für $\#G = p$ prim gibt es nur die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Für $\#G = p^2$ muss G abelsch sein (siehe Folgerung 2.19), also ist entweder $G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ zyklisch oder $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Die für $p = 2$ auftretende Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong D_2$ heißt die *Kleinsche Vierergruppe*. (Manchmal wird dieser Name auch spezifischer für den zu dieser Gruppe isomorphen Normalteiler $V = \{\text{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ der A_4 und S_4 verwendet.)
- Für $\#G = 2p$ mit $p \geq 3$ prim gilt nach Folgerung 4.14, dass G entweder zyklisch oder G isomorph zur Diedergruppe D_p ist. Im Fall $p = 3$ gilt $D_3 \cong S_3$; somit ist die symmetrische Gruppe S_3 die kleinste nicht-abelsche Gruppe.
- Für $\#G = 15$ gilt nach Satz 4.13, dass G zyklisch ist. ♣

DEF
Kleinsche
Vierergruppe

Beispiel. Die Klassifikation der Gruppen G der Ordnung 8 ist etwas komplizierter. Ist G abelsch, dann gibt es die drei Möglichkeiten

BSP
$G = 8$

$$G \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \quad G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(vergleiche den Klassifikationssatz für endliche abelsche Gruppen).

Ist G nicht abelsch, dann wissen wir, dass das Zentrum $Z(G)$ nichttrivial ist (Folgerung 2.17) und dass $Z(G) \neq G$ gilt. Wäre $\#Z(G) = 4$, dann würde wie im Beweis von Folgerung 4.14 folgen, dass G doch abelsch wäre; dieser Fall kann also nicht eintreten. Es folgt $Z(G) = \{1, z\}$ mit einem $1_G \neq z \in G$.

G muss Elemente der Ordnung 4 enthalten (denn eine Gruppe, deren nichttriviale Elemente allesamt Ordnung 2 haben, ist abelsch — Übung). Sei $g \in G$ ein solches Element. Dann muss gelten $Z(G) \subset \langle g \rangle$, also $g^2 = z$, denn sonst wäre nach Lemma 3.6 G abelsch. Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist, dass ein Element von $G \setminus \langle g \rangle$ Ordnung 2 hat. Sei h ein solches Element. Da $\langle g \rangle$ ein Normalteiler ist, gilt $hgh = hgh^{-1} = g^{\pm 1}$. Es kann nicht $hgh^{-1} = g$ sein, da dann G abelsch wäre. Also ist $hgh^{-1} = g^{-1}$ und G ist isomorph zur Diedergruppe D_4 . In diesem Fall haben dann *alle* Elemente von $G \setminus \langle g \rangle$ die Ordnung 2.

Die andere Möglichkeit ist, dass alle Elemente von $G \setminus \langle g \rangle$ die Ordnung 4 haben. Es gibt dann insgesamt sechs Elemente g der Ordnung 4 und g^2 ist stets das einzige Element der Ordnung 2, nämlich z . Wenn wir $-1 := z$ schreiben und Erzeuger von zwei verschiedenen Untergruppen der Ordnung 4 mit i und j bezeichnen, dann gilt $i^2 = j^2 = -1$. Das Element $k = ij$ muss ebenfalls Ordnung 4 haben und kann nicht in $\langle i \rangle$ oder $\langle j \rangle$ liegen. Für ji gilt das Gleiche; außerdem muss ji von ij verschieden sein (denn sonst wäre $G = \langle i, j \rangle$ abelsch). Das einzig verbleibende Element für ji ist dann $-k := (-1)k = k^{-1}$. Wir sehen, dass G isomorph zur *Quaternionengruppe*

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}^\times$$

ist.

Es gibt also insgesamt fünf verschiedene Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 8, nämlich die drei abelschen und dazu D_4 und Q . ♣

Auch für ungerade Primzahlen p gilt, dass es drei abelsche und zwei nicht-abelsche Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung p^3 gibt. Diese beiden nicht-abelschen Gruppen haben aber eine andere Struktur als D_4 und Q ; der Beweis ist daher etwas anders (Bonus-Aufgabe). Eine solche Gruppe ist

$$H_p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{F}_p \right\} \leq \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_p);$$

das ist eine p -Sylowgruppe in $\mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_p)$. Für $p = 2$ gilt $H_2 \cong D_4$, denn H_2 ist nicht abelsch und enthält genau zwei Elemente der Ordnung 4 (nämlich die mit $a = c = 1$).

Man kann die Sätze von Sylow auch benutzen, um zum Beispiel die Gruppen der Ordnung 12 zu klassifizieren (Übungsaufgabe). Neben den beiden Typen $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ von abelschen Gruppen gibt es drei Typen von nicht-abelschen Gruppen, nämlich die Diedergruppe D_6 , die alternierende Gruppe A_4 und eine weitere Gruppe $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, wobei ein Erzeuger von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ durch Negation auf $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ operiert. Man kann die Gruppe daher auch beschreiben als $G = \langle a, b \rangle$ mit $\mathrm{ord}(a) = 3$, $\mathrm{ord}(b) = 4$, $bab^{-1} = a^{-1}$.

Im Allgemeinen kann die Klassifikation der Gruppen der Ordnung n allerdings recht kompliziert werden, besonders wenn n durch eine hohe Zweierpotenz teilbar ist.

Als weitere Anwendung der Sylowschen Sätze kann man beweisen, dass die A_5 (mit $\#A_5 = 60$) die kleinste nicht-abelsche einfache Gruppe ist. Dazu ist zu zeigen, dass jede Gruppe G der Ordnung $n = \#G < 60$, sodass $n > 1$ keine Primzahl ist, einen nichttrivialen Normalteiler hat. Für $n = pq$ mit Primzahlen p, q folgt das aus Folgerung 2.19 (für den Fall $p = q$) und Satz 4.13. Es bleiben

$$n = 8, 12, 16, 18, 20, 24, 27, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 56.$$

Ist n eine Primzahlpotenz, dann ist G abelsch oder $Z(G)$ ist ein nichttrivialer Normalteiler; in beiden Fällen ist G nicht einfach. Ist $n = kp^e$ mit p prim und $p \nmid k$, sodass $1 < k < p$ ist, dann erfüllt die Anzahl s_p der p -Sylowgruppen von G die Bedingungen $s_p \equiv 1 \pmod p$ und $s_p \mid k$, was hier $s_p = 1$ bedeutet. Damit hat G einen Normalteiler der Ordnung p^e und ist nicht einfach. Damit sind $n = 8, 16, 18, 20, 27, 28, 32, 42, 44, 50, 52$ und 54 erledigt. Es bleiben $n = 12, 24, 30, 36, 40, 45, 48$ und 56 . Die Fälle $n = 40$ und 45 werden durch die Überlegung erledigt, dass es jeweils nur eine 5-Sylowgruppe geben kann.

Wir beweisen eine Hilfsaussage.

Lemma. *Sei G eine endliche Gruppe mit einer Untergruppe U , deren Konjugationsklasse $\{gUg^{-1} \mid g \in G\}$ genau $m > 1$ Elemente habe. Ist $\#G > m!$, dann ist G nicht einfach.*

LEMMA

Beweis. Sei X die Konjugationsklasse von U . G operiert auf X transitiv durch Konjugation; das liefert einen Homomorphismus $\phi: G \rightarrow S(X) \cong S_m$. Da die Operation transitiv ist, kann das Bild von ϕ nicht trivial sein, also ist $\ker(\phi)$ eine echte Untergruppe. Da $\#G > \#S_m$ ist, kann ϕ nicht injektiv sein, also ist $\ker(\phi)$ ein nichttrivialer Normalteiler von G . □

Das lässt sich auf Gruppen mit $\#G = kp^e$ anwenden, wenn $\#G > k!$ ist: Es gibt höchstens k p -Sylowgruppen in G , die eine Konjugationsklasse bilden. Entweder gibt es nur eine p -Sylowgruppe in G , dann ist sie ein Normalteiler und G ist nicht einfach, oder das Lemma ist anwendbar. Das erledigt $n = 12, 24, 36, 48$. Es bleiben $n = 30$ und 56 . Hierfür braucht man noch eine andere Überlegung.

DEF
Quaternionen-
gruppe

Im Fall $n = 56$ gilt für die Anzahl s_7 der 7-Sylowgruppen $s_7 \in \{1, 8\}$. Im Fall $s_7 = 1$ ist die 7-Sylowgruppe ein Normalteiler. Im Fall $s_7 = 8$ gibt es $8 \cdot 6 = 48$ Elemente der Ordnung 7 in G (zwei verschiedene Untergruppen der Ordnung 7 können nur das neutrale Element gemeinsam haben). Neben dem neutralen Element bleiben also noch sieben Elemente übrig, was gerade für eine 2-Sylowgruppe (der Ordnung 8) reicht. Also ist die 2-Sylowgruppe ein Normalteiler.

Im Fall $n = 30$ ist $s_5 = 1$ oder $s_5 = 6$. Im ersten Fall ist die 5-Sylowgruppe ein Normalteiler. Im zweiten Fall gibt es $6 \cdot 4 = 24$ Elemente der Ordnung 5. Es bleiben fünf Elemente $\neq 1_G$ mit anderen Ordnungen übrig. Entweder gibt es genau ein Element g der Ordnung 2, dann ist $\langle g \rangle$ ein nichttrivialer Normalteiler. Oder es gibt mindestens drei solche Elemente (die Anzahl muss ungerade sein). Weil es auch mindestens zwei Elemente der Ordnung 3 geben muss, gibt es dann genau zwei solche Elemente, h und h^{-1} , und $\langle h \rangle$ ist ein nichttrivialer Normalteiler.

Damit ist gezeigt, dass es keine nicht-abelsche einfache Gruppe G mit $\#G < 60$ gibt. Es bleibt nachzuweisen, dass jede einfache Gruppe G der Ordnung 60 zur A_5 isomorph ist. So ein G hat $s_5 = 6$; die Konstruktion im Beweis des Lemmas oben liefert einen Homomorphismus $G \rightarrow S_6$, der injektiv sein muss. G ist also isomorph zu einer Untergruppe der S_6 , die Ordnung 60 hat und transitiv operiert. Man stellt dann fest, dass diese Untergruppen alle zur A_5 isomorph sind. Alternativ kann man durch ähnliche (aber deutlich aufwändigere) Überlegungen wie oben für den Fall $\#G = 30$ zeigen, dass G genau fünf 2-Sylowgruppen haben muss. Man erhält dann analog wie eben eine Einbettung $G \rightarrow S_5$, deren Bild wegen $\#G = 60$ die A_5 sein muss (Bonus-Aufgabe).

5. KÖRPERERWEITERUNGEN

Das zweite große Thema dieser Vorlesung nach der Gruppentheorie ist die Theorie der Körpererweiterungen.

*

5.1. Definition. Sei K' ein Körper. Ein *Teilkörper* von K' ist ein Unterring $K \subset K'$, der ein Körper ist (d.h., sodass für alle $a \in K \setminus \{0\}$ auch $a^{-1} \in K$ ist). In diesem Fall heißt $K \subset K'$ (auch K'/K oder $K'|K$ geschrieben) eine *Körpererweiterung* von K .

DEF
Teilkörper
Körper-
erweiterung
Zwischen-
körper

Ist L ein weiterer Teilkörper von K' mit $K \subset L \subset K'$, dann heißt L ein *Zwischenkörper* der Körpererweiterung $K \subset K'$. \diamond

5.2. Beispiele. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{Q}(\mathbf{i}) \subset \mathbb{C}$ sind Körpererweiterungen. $\mathbb{Q}(\mathbf{i})$ und \mathbb{R} sind Zwischenkörper von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$.

BSP
♣ Körper-
erweiterungen

Ein Homomorphismus $\phi: K \rightarrow L$ zwischen Körpern ist dasselbe wie ein Ringhomomorphismus. Man beachte, dass ein Körperhomomorphismus stets injektiv ist: Der Kern von ϕ ist ein Ideal von K , muss also entweder trivial sein oder ganz K . Der zweite Fall ist wegen $\phi(1) = 1 \neq 0$ nicht möglich. Man identifiziert daher häufig K mit seinem Bild unter der Einbettung ϕ und erhält eine Körpererweiterung $K = \phi(K) \subset L$.

5.3. Definition. Sei K ein Körper und seien $K \subset K_1$ und $K \subset K_2$ zwei Körpererweiterungen von K . Die beiden Körpererweiterungen heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $\phi: K_1 \rightarrow K_2$ gibt mit $\phi|_K = \text{id}_K$. \diamond

DEF
Isomorphie
von Körper-
erweiterungen

(Hier schreiben wir der Kürze halber id_K auch für den Inklusionshomomorphismus $K \rightarrow K_2$.)

Man sieht ganz genauso wie bei Unterringen oder Untergruppen, dass beliebige Durchschnitte (und aufsteigende Vereinigungen) von Teilkörpern wieder Teilkörper sind. Wir können also wieder folgende Definition formulieren:

5.4. Definition. Seien $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und $A \subset K'$ eine Teilmenge. Wir schreiben

$$K(A) = \bigcap \{L \mid K \subset L \subset K' \text{ Zwischenkörper mit } A \subset L\}$$

für den kleinsten Teilkörper von K' , der K und A enthält. Man sagt auch, $K(A)$ entstehe durch (*Körper-*)*Adjunktion* von A zu K . Ist $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ endlich, dann schreiben wir wie üblich $K(a_1, \dots, a_n)$. Gilt $K' = K(a)$ für geeignetes $a \in K'$, dann heißt die Körpererweiterung $K \subset K'$ *einfach*, und a heißt ein *primitives Element* der Körpererweiterung.

DEF
Adjunktion
einfache
Körpererw.
primitives
Element
Kompositum

Sind $K_1, K_2 \subset K'$ zwei Teilkörper, dann schreibt man auch $K_1 K_2$ für den kleinsten Teilkörper $K_1(K_2) = K_2(K_1)$ von K' , der sowohl K_1 als auch K_2 enthält, und nennt ihn das *Kompositum* von K_1 und K_2 . \diamond

Man vergleiche die Definition von $K[A]$ als kleinsten Unterring von K' , der K und A enthält. In diesem Fall spricht man auch von *Ringadjunktion* von A zu K . Man kann $K(A)$ mit dem Quotientenkörper von $K[A]$ identifizieren.

Wir hatten schon Beispiele wie $\mathbb{Q}(\mathbf{i})$ oder $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ gesehen. Ein anderes Beispiel ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\mathbf{i})$; \mathbb{C} ist also eine einfache Erweiterung von \mathbb{R} .

5.5. Definition. Man kann auch den Durchschnitt *aller* Teilkörper eines Körpers K betrachten. Dies ist offenbar der kleinste Körper, der in K enthalten ist und heißt der *Primkörper* von K . \diamond

DEF
Primkörper

Bevor wir uns ansehen, wie diese Primkörper aussehen können, führen wir einen weiteren Begriff ein. Wir erinnern uns daran, dass es für jeden Ring R einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\phi_R: \mathbb{Z} \rightarrow R$ gibt (denn $1_{\mathbb{Z}}$ muss auf 1_R abgebildet werden; alles andere ergibt sich daraus). Der Kern von ϕ_R ist ein Ideal von \mathbb{Z} , kann also als $\ker(\phi_R) = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geschrieben werden.

* **5.6. Definition.** Sei R ein Ring. Der nichtnegative Erzeuger des Ideals $\ker(\phi_R)$ von \mathbb{Z} heißt die *Charakteristik* von R , $\text{char}(R)$. \diamond

DEF
Charakteristik

5.7. Lemma. Ist R ein Integritätsbereich (z.B. ein Körper), dann ist $\text{char}(R)$ entweder null oder eine Primzahl.

LEMMA
Charakteristik

Beweis. Wir müssen den Fall ausschließen, dass $n = \text{char}(R) > 0$ eine zusammengesetzte Zahl oder $n = 1$ ist. Im Fall $n = 1$ wäre $1 \in \ker(\phi_R)$, also $1_R = \phi_R(1) = 0_R$, was der Voraussetzung widerspricht (in einem Integritätsbereich sind 0 und 1 verschieden).

Sei also n zusammengesetzt und $n = n_1 n_2$ eine nichttriviale Faktorisierung. Dann gilt $\phi_R(n_1), \phi_R(n_2) \neq 0$, aber $\phi_R(n_1)\phi_R(n_2) = \phi_R(n_1 n_2) = \phi_R(n) = 0$, also hat R Nullteiler; das ist ein Widerspruch.

Ein alternativer Beweis verwendet Aussagen über Ringe und Ideale: Als Unterring von R ist $\text{im}(\phi_R)$ ein Integritätsbereich. Daraus folgt, dass $\ker(\phi_R)$ ein Primideal ist. Die Primideale im Hauptidealring \mathbb{Z} sind aber genau das Nullideal und die von Primelementen = Primzahlen erzeugten Ideale. \square

5.8. Lemma. Sei K ein Körper. Gilt $\text{char}(K) = 0$, dann ist der Primkörper von K isomorph zu \mathbb{Q} ; insbesondere ist K unendlich. Anderenfalls ist $\text{char}(K) = p$ eine Primzahl, und der Primkörper von K ist isomorph zu \mathbb{F}_p .

LEMMA
Primkörper

Ein Körper der Charakteristik p kann endlich sein (wie etwa \mathbb{F}_p selbst), kann aber auch unendlich sein (wie etwa der Quotientenkörper $\mathbb{F}_p(X)$ des Polynomrings $\mathbb{F}_p[X]$).

Beweis. Sei P der Primkörper von K . Dann ist (wegen der Eindeutigkeit von ϕ_R) $\phi_P = \phi_K$ mit Ziel eingeschränkt auf P , also ist $\text{im}(\phi_K) \subset P$.

Im Fall $\text{char}(K) = 0$ ist ϕ_K injektiv, also ist $\text{im}(\phi_K) \cong \mathbb{Z}$. Nach der Definition des Quotientenkörpers (Satz 8.1 im Skript zur „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“) gibt es eine Fortsetzung von ϕ_K zu einem Homomorphismus $\tilde{\phi}_K: \mathbb{Q} \rightarrow P \subset K$. Als Homomorphismus zwischen Körpern ist $\tilde{\phi}_K$ injektiv, und sein Bild ist ein in P enthaltener Teilkörper von K ; es folgt $P = \text{im}(\tilde{\phi}_K) \cong \mathbb{Q}$.

Im Fall $\text{char}(K) = p > 0$ ist $\ker(\phi_K) = p\mathbb{Z}$, also ist $P \supset \text{im}(\phi_K) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ bereits ein Körper und es folgt $P = \text{im}(\phi_K) \cong \mathbb{F}_p$. \square

Man sieht, dass $\text{char}(K)$ nur vom Primkörper von K abhängt (und umgekehrt). Insbesondere gilt in einer Körpererweiterung $K \subset K'$ stets $\text{char}(K') = \text{char}(K)$.

Wir kommen jetzt zu einer einfachen Beobachtung, die für die Körpertheorie jedoch sehr wichtig ist, weil sie eine Verbindung zur Linearen Algebra aufzeigt.

Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung. Indem wir die Multiplikation von K' auf $K \times K'$ einschränken, erhalten wir eine skalare Multiplikation von K auf K' . Aus den Körperaxiomen folgt dann sofort, dass K' ein K -Vektorraum ist. Zum Beispiel ist \mathbb{C} ein zweidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und \mathbb{R} ist ein unendlichdimensionaler \mathbb{Q} -Vektorraum (denn jeder endlichdimensionale \mathbb{Q} -Vektorraum ist abzählbar). Das ermöglicht die folgende Definition.

5.9. Definition. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung. Dann heißt die Dimension von K' als K -Vektorraum,

$$[K' : K] = \dim_K K' \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\},$$

der *Grad* der Körpererweiterung $K \subset K'$ oder auch der *Körpergrad* von K' über K . Ist $[K' : K] < \infty$, dann heißt die Körpererweiterung $K \subset K'$ *endlich*, sonst *unendlich*. Im Fall $[K' : K] = 1$ ist $K = K'$ und die Körpererweiterung heißt *trivial*. Im Fall $[K' : K] = 2$ heißt die Körpererweiterung auch *quadratisch*, im Fall $[K' : K] = 3$ *kubisch*. \diamond

DEF
Grad

(un)endliche
Körpererw.

5.10. Beispiele. Es ist $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ und $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$. Ist F ein endlicher Körper, dann ist $\text{char}(F) = p$ eine Primzahl (nach Lemma 5.8), also $\mathbb{F}_p \subset F$, wenn wir den Primkörper mit \mathbb{F}_p identifizieren; außerdem $[F : \mathbb{F}_p] = n < \infty$. Es folgt $\#F = p^n$, denn F ist ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{F}_p . Wir werden später zeigen, dass es zu jeder Primzahlpotenz p^n auch einen Körper mit p^n Elementen gibt. \clubsuit

BSP
Körpergrad

* **5.11. Satz.** Sei $K \subset L \subset K'$ ein Zwischenkörper. Dann gilt

$$[K' : K] = [K' : L] \cdot [L : K]$$

(mit der üblichen Rechenregel $n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty$ für $n \in \{1, 2, 3, \dots, \infty\}$).

SATZ
Gradsatz

Beweis. Ist einer der Grade $[K' : L]$ oder $[L : K]$ unendlich, dann gilt das auch für $[K' : K]$, denn K' enthält dann eine unendliche Menge über K (oder sogar über L) linear unabhängiger Elemente. Wir können also annehmen, dass $n = [K' : L]$ und $m = [L : K]$ beide endlich sind. Wir wählen Basen (x_1, \dots, x_m) von L über K und (y_1, \dots, y_n) von K' über L . Dann ist $B = (x_i y_j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ eine Basis von K' über K : B ist ein Erzeugendensystem, denn jedes $\alpha \in K'$ kann in der Form $\alpha = \sum_{j=1}^n a_j y_j$ mit $a_j \in L$ geschrieben werden, und jedes a_j kann wiederum als $a_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} x_i$ mit $b_{ij} \in K$ geschrieben werden, also ist $\alpha = \sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j$. B ist auch K -linear unabhängig, denn aus $\sum_{i,j} b_{ij} x_i y_j = 0$ mit $b_{ij} \in K$ folgt zunächst wegen der linearen Unabhängigkeit der y_j über L , dass $\sum_i b_{ij} x_i = 0$ sein muss für alle $1 \leq j \leq n$, und dann wegen der linearen Unabhängigkeit der x_i über K , dass alle $b_{ij} = 0$ sind.

Es folgt $[K' : K] = \dim_K K' = \#B = nm = [K' : L] \cdot [L : K]$. \square

5.12. Folgerung. Sei $K \subset L \subset K'$ ein Zwischenkörper und $[K' : K] < \infty$. Dann ist $[L : K]$ ein Teiler von $[K' : K]$, und $L = K$ gilt genau dann, wenn $[K' : L] = [K' : K]$ ist.

FOLG
Grad eines
Zwischen-
körpers

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Satz 5.11. Die zweite ergibt sich aus $L = K \iff [L : K] = 1 \iff [K' : L] = [K' : K]$. \square

5.13. Lemma. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern L_1 und L_2 . Dann gilt:

LEMMA
Körpergrade

- (1) Ist (b_1, b_2, \dots, b_n) eine K -Basis von L_2 mit $b_1 = 1$, dann ist $L_1 L_2 = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{L_1} \subset K'$.
- (2) $[L_1 L_2 : L_1] \leq [L_2 : K]$.
- (3) $[L_1 L_2 : K] \leq [L_1 : K] \cdot [L_2 : K]$. Ist die rechte Seite endlich und gilt Gleichheit, dann folgt $L_1 \cap L_2 = K$.
- (4) Sind $[L_1 : K]$ und $[L_2 : K]$ endlich und teilerfremd, dann gilt Gleichheit in (3).

Beweis. Im Fall $[L_2 : K] = \infty$ ist nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass $[L_2 : K] = n$ endlich ist.

- (1) Sei $M = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{L_1} \subset K$. Es ist klar, dass M sowohl L_1 als auch L_2 enthält. Außerdem muss jeder Teilkörper von K' , der L_1 und L_2 enthält, auch M enthalten (denn alle Elemente von M sind Linearkombinationen von $b_1, \dots, b_n \in L_2$ mit Koeffizienten in L_1). Wir zeigen, dass M ein Körper ist. Dann ist M der *kleinste* Teilkörper von K , der L_1 und L_2 enthält, also folgt $M = L_1 L_2$.

Zunächst ist klar, dass M unter Addition und Subtraktion abgeschlossen ist und 0 und 1 enthält. Da alle Produkte $b_i b_j \in L_2$ wieder als (K -)Linearkombinationen der b_i geschrieben werden können, ist M auch unter der Multiplikation abgeschlossen, also jedenfalls ein Unterring von K' . Sei $0 \neq a \in M$. Dann ist die Abbildung $m_a : M \rightarrow M$, $x \mapsto ax$, L_1 -linear und injektiv. Da M ein endlichdimensionaler L_1 -Vektorraum ist, muss m_a auch surjektiv sein, also gibt es $x \in M$ mit $ax = 1$; damit ist $a^{-1} \in M$.

Der Rest des Beweises ist eine Übungsaufgabe. \square

5.14. Beispiel. Gilt $L_1 \cap L_2 = K$ und sind $[L_1 : K]$ und $[L_2 : K]$ endlich, dann folgt im Allgemeinen nicht, dass $[L_1 L_2 : K] = [L_1 : K] \cdot [L_2 : K]$ ist. Zum Beispiel gilt mit $\omega = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$, dass

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3, \quad \text{aber} \quad [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 6 < 3 \cdot 3$$

ist. (Beweis als Übungsaufgabe.) \clubsuit

BSP
Umkehrung
von 5.13(3)
gilt nicht

6. ALGEBRAISCHE ELEMENTE UND ERWEITERUNGEN

Wir kommen nun zu einer wichtigen Begriffsbildung in der Körpertheorie.

* **6.1. Definition.** Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung.

- (1) Ein Element $a \in K'$ heißt *algebraisch über K* , wenn es ein normiertes Polynom $f \in K[X]$ gibt mit $f(a) = 0$. Ist a nicht algebraisch über K , dann heißt a *transzendent über K* . Im Fall $K = \mathbb{Q}$ und $K' = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} spricht man von *algebraischen* bzw. *transzendenten Zahlen*.
- (2) Die Körpererweiterung $K \subset K'$ heißt *algebraisch* und K' heißt *algebraisch über K* , wenn alle Elemente von K' über K algebraisch sind. Anderenfalls heißt die Körpererweiterung *transzendent*.
- (3) K heißt *algebraisch abgeschlossen in K'* , wenn jedes Element von K' , das über K algebraisch ist, bereits in K liegt. In diesem Fall heißt die Körpererweiterung $K \subset K'$ auch *rein transzendent*.
- (4) Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nicht konstante Polynom $f \in K[X]$ eine Nullstelle in K hat. \diamond

DEF
algebraisch
transzendent
algebraisch
abgeschlossen

Durch Induktion folgt leicht, dass über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Daraus folgt wiederum, dass K in jedem Erweiterungskörper algebraisch abgeschlossen ist.

6.2. Beispiele.

- (1) Die Zahlen $\sqrt{2}$, i , $\sqrt[3]{2}$ sind algebraisch als Nullstellen von $X^2 - 2$, $X^2 + 1$, $X^3 - 2$. Ebenso sind alle Zahlen der Form $\zeta = e^{2\pi i q}$ mit $q \in \mathbb{Q}$ algebraisch, denn ist $q = a/b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ (und $b \neq 0$), dann ist ζ Nullstelle von $X^b - 1$.
- (2) Die Zahlen e und π sind transzendent (Hermite 1873, Lindemann 1882). Demgegenüber ist unbekannt, ob $e + \pi$ und $e \cdot \pi$ beide transzendent sind. (Sie können jedenfalls nicht beide algebraisch sein, wie sich noch zeigen wird.)
- (3) \mathbb{C} ist algebraisch über \mathbb{R} , denn jede (echt) komplexe Zahl $z = a + bi$ ist Nullstelle des reellen Polynoms $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$. Insbesondere ist \mathbb{R} nicht algebraisch abgeschlossen.
- (4) Der Körper \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen. Da \mathbb{R} und \mathbb{C} unter anderem durch topologische Eigenschaften definiert sind, kann es dafür keinen rein algebraischen Beweis geben. Der einfachste Beweis kann mit Hilfsmitteln der Funktionentheorie geführt werden (Satz von Liouville). \clubsuit

BSP
algebraische
und
transzendente
Zahlen
und Körper-
erweiterungen



C. Hermite
1822–1901



F. v. Lindemann
1852–1939

Im Folgenden wird mehrfach auf das Skript „Einführung in die Zahlentheorie und algebraische Strukturen“ vom Wintersemester 2021/22 verwiesen. Dies geschieht in der Form „EZAS.a.b“, wobei „a.b“ die Nummer der betreffenden Aussage ist.

Ist $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und $a \in K'$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\phi_a: K[X] \longrightarrow K' \quad \text{mit } \phi_a|_K = \text{id}_K \text{ und } \phi_a(X) = a,$$

vergleiche Satz EZAS.9.2 (universelle Eigenschaft des Polynomrings). (Wir schreiben hier der Kürze halber id_K auch für den Inklusionshomomorphismus $K \rightarrow K'$.) Dies ist der Einsetzungshomomorphismus $f \mapsto f(a)$; es gilt $K[a] = \text{im}(\phi_a)$. Wir haben dann folgende Charakterisierung.

6.3. Satz. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und $a \in K'$. Sei ϕ_a wie oben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) a ist algebraisch über K .
- (2) ϕ_a ist nicht injektiv.
- (3) $K[a] = K(a)$.
- (4) $K \subset K(a)$ ist eine endliche Körpererweiterung.

SATZ
Charakterisierung von
„algebraisch“

In diesem Fall ist $\ker(\phi_a) = \langle f \rangle_{K[X]}$ mit einem eindeutig bestimmten normierten irreduziblen Polynom $f \in K[X]$, und es gilt $[K(a) : K] = \deg(f)$; die Potenzen $(1, a, a^2, \dots, a^{\deg(f)-1})$ bilden eine K -Basis von $K(a)$.

Beweis. „(1) \Rightarrow (2)“: Ist a algebraisch über K , dann gibt es ein normiertes Polynom $h \in K[X]$ mit $h(a) = 0$. Dann ist $0 \neq h \in \ker(\phi_a)$, also ist ϕ_a nicht injektiv.

„(2) \Rightarrow (3)“: Ist ϕ_a nicht injektiv, dann ist der Kern $\ker(\phi_a)$ ein von null verschiedenes Ideal von $K[X]$. Da $K[X]$ ein Hauptidealring ist, ist $\ker(\phi_a) = \langle f \rangle_{K[X]}$ mit einem Polynom $f \neq 0$, das bis auf Multiplikation mit einem Element aus K^\times eindeutig bestimmt ist. Wenn wir zusätzlich fordern, dass f normiert ist, dann ist f eindeutig bestimmt. Nach dem Homomorphiesatz für Ringe EZAS.6.13 ist $K[a] = \text{im}(\phi_a) \cong K[X]/\langle f \rangle_{K[X]}$. Da $K[a] \subset K$ ein Integritätsbereich ist, ist f ein Primelement und damit irreduzibel. Damit ist das von f erzeugte Ideal maximal, also ist $K[a]$ sogar ein Körper und damit gleich $K(a)$ (vgl. EZAS.6.18).

„(3) \Rightarrow (4)“: Gilt $K[a] = K(a)$, dann ist $\text{im}(\phi_a)$ ein Körper, also ist $\ker(\phi_a)$ ein maximales Ideal und damit nicht das Nullideal; es gilt also $\ker(\phi_a) = \langle f \rangle_{K[X]}$ mit einem normierten Polynom f . Sei $n = \deg(f)$. Dann ist $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ eine Basis von $K[a] = K(a)$: Sei $b \in K[a]$ und $h \in K[X]$ ein Urbild von b unter ϕ_a . Dann gibt es $q, r \in K[X]$ mit $\deg(r) < n$ und $h = qf + r$, also ist

$$b = h(a) = q(a)f(a) + r(a) = r(a) \in \langle 1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \rangle_K.$$

Ist $r(a) = r_0 + r_1 a + \dots + r_{n-1} a^{n-1} = 0$ mit $r_j \in K$, dann ist das zugehörige Polynom r im Kern von ϕ_a , also durch f teilbar. Wegen $\deg(r) < n = \deg(f)$ ist das nur für $r = 0$ möglich. Damit ist gezeigt, dass $1, a, \dots, a^{n-1}$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des K -Vektorraums $K[a]$ ist. Insbesondere ist $K(a) = K[a]$ eine endliche Erweiterung von K , und $[K(a) : K] = n = \deg(f)$.

„(4) \Rightarrow (1)“: Ist $K \subset K(a)$ eine endliche Körpererweiterung, dann müssen die unendlich vielen Elemente $1, a, a^2, \dots \in K(a)$ über K linear abhängig sein. Es gibt also eine Relation

$$h_0 + h_1 a + h_2 a^2 + \dots + h_n a^n = 0$$

mit $h_j \in K$ und $h_n \neq 0$. Nach Skalieren können wir annehmen, dass $h_n = 1$ ist. Dann ist a eine Nullstelle des normierten Polynoms

$$h = X^n + h_{n-1} X^{n-1} + \dots + h_2 X^2 + h_1 X + h_0 \in K[X],$$

also ist a algebraisch über K . □

Man sieht, dass Algebraizität eine *Endlichkeitsbedingung* ist (wie zum Beispiel auch Kompaktheit in der Topologie): Aus dem Beweis folgt die Äquivalenz

$$a \text{ algebraisch über } K \iff \dim_K K[a] < \infty.$$

Das in Satz 6.3 auftretende Polynom f hat einen Namen:

* **6.4. Definition.** Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und sei $a \in K'$ algebraisch über K . Dann heißt das normierte und irreduzible Polynom $f \in K[X]$ mit $f(a) = 0$ das *Minimalpolynom* von a über K , und der Grad $[K(a) : K] = \deg(f)$ heißt der *Grad* von a über K . **DEF**
Minimalpolynom

Nach Satz 6.3 existiert das Minimalpolynom und ist eindeutig bestimmt.

Dieser Begriff ist analog zum Minimalpolynom einer Matrix, das wir in der Linearen Algebra eingeführt haben (allerdings muss das Minimalpolynom einer Matrix nicht irreduzibel sein).

Da der Kern von ϕ_a vom Minimalpolynom f von a erzeugt wird, folgt für ein Polynom $h \in K[X]$: $h(a) = 0$ gilt genau dann, wenn h ein Vielfaches von f ist.

6.5. Folgerung. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und sei $a \in K'$. Ist a Nullstelle eines normierten irreduziblen Polynoms $f \in K[X]$, dann ist a algebraisch über K mit Minimalpolynom f . Insbesondere gilt $[K(a) : K] = \deg(f)$. **FOLG**
Minimalpolynom

Beweis. Da a Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeffizienten in K ist, ist a algebraisch über K . Da f irreduzibel und normiert ist und $f(a) = 0$ gilt, ist f das Minimalpolynom von a über K . Die Aussage über den Grad von a über K war Teil von Satz 6.3. □

6.6. Beispiel. Zum Beispiel ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[7]{5}) : \mathbb{Q}] = 7$, weil $\sqrt[7]{5}$ Nullstelle des (nach Eisenstein) irreduziblen Polynoms $X^7 - 5$ ist. **BSP**
Grad über Minimalpolynom

Die folgende Aussage ist eine wichtige Konsequenz von Satz 6.3.

6.7. Folgerung. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung. Sind $a, b \in K'$ algebraisch über K , dann sind auch $a \pm b$, ab und (falls $b \neq 0$) a/b algebraisch über K . Insbesondere ist die Menge aller über K algebraischen Elemente von K' ein Körper. **FOLG**
algebraische Elemente bilden Körper

6.8. Definition. Dieser Teilkörper von K' heißt der *algebraische Abschluss* von K in K' . **DEF**
algebraischer Abschluss in K'

Beweis. Aus Satz 6.3 folgt $[K(a) : K], [K(b) : K] < \infty$. Aus Lemma 5.13 (3) ergibt sich, dass dann $K(a, b)$ ebenfalls eine endliche Erweiterung von K ist. Da $a \pm b$, ab und a/b Elemente von $K(a, b)$ sind, müssen die von ihnen erzeugten Körpererweiterungen von K ebenfalls endlich sein. Wiederum nach Satz 6.3 sind diese Elemente dann algebraisch über K . □

Das bedeutet also, dass, wenn a und b Nullstellen von normierten Polynomen über K sind, dies auch für $a \pm b$, ab und a/b gilt. Wie man aus den Minimalpolynomen von a und b geeignete Polynome für $a \pm b$ usw. bestimmen kann, ist eine andere Frage. Eine Möglichkeit dafür liefert die *Resultante* von zwei Polynomen (das ist eine gewisse aus den Koeffizienten der Polynome gebildete Determinante).

6.9. Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ sind $\cos \frac{2\pi}{n}$ und $\sin \frac{2\pi}{n}$ algebraisch. Denn es ist $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$ algebraisch (als Nullstelle von $X^n - 1$), also ist $\cos \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ algebraisch. Weil $i = \zeta_4$ ebenfalls algebraisch ist, ist auch $\sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2i}(\zeta_n - \zeta_n^{-1})$ algebraisch.

BSP
 $\cos 2\pi/n,$
 $\sin 2\pi/n$
 sind
 algebraisch

Sei $K_n = \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Für $n > 2$ gilt $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : K_n] = 2$, denn ζ_n ist Nullstelle des Polynoms $X^2 - 2\cos \frac{2\pi}{n}X + 1 \in K_n[X]$, und $\mathbb{Q}(\zeta_n) \neq K_n$, denn $K_n \subset \mathbb{R}$, während ζ_n echt komplex ist. Man kann zeigen (wir werden das später tun), dass $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ ist; es folgt $[K_n : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2}\varphi(n)$. Für $n = 7$ und $n = 9$ ist $\varphi(n) = 6$, also haben die Minimalpolynome von $\cos \frac{2\pi}{7}$ und $\cos \frac{2\pi}{9}$ beide den Grad 3. (Bestimmung dieser Minimalpolynome als Übungsaufgabe.) ♣

6.10. Folgerung. Jede endliche Körpererweiterung $K \subset K'$ ist algebraisch.

FOLG
 endliche KE
 sind
 algebraisch

Beweis. Ist $a \in K'$, dann ist $K(a)$ als Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung $K \subset K'$ endlich über K , also ist a nach Satz 6.3 algebraisch über K . □

6.11. Beispiel. Die Umkehrung von Folgerung 6.10 gilt nicht: Sei \mathbb{A} der algebraische Abschluss von \mathbb{Q} in \mathbb{C} . Dann ist \mathbb{A} eine algebraische Erweiterung von \mathbb{Q} von unendlichem Grad. Denn für jedes $n \geq 1$ ist das Polynom $X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel (Eisenstein-Kriterium EZAS.10.13). Es gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \subset \mathbb{A}$, also auch $n = [\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{A} : \mathbb{Q}]$.

BSP
 unendliche
 alg. KE

Der Körper \mathbb{A} besteht aus allen algebraischen komplexen Zahlen. Dass er selbst algebraisch abgeschlossen ist, folgt aus dem folgenden Ergebnis. ♣

6.12. Satz. Seien $K \subset L \subset K'$ Körpererweiterungen. K' ist genau dann algebraisch über K , wenn sowohl L algebraisch über K als auch K' algebraisch über L ist.

SATZ
 Transitivität
 der
 Algebraizität

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $K \subset K'$ algebraisch ist. Dann ist jedes Element $a \in K'$ algebraisch über K , also ist jedes solche a auch algebraisch über L (denn jedes Polynom in $K[X]$ ist auch in $L[X]$), also ist $L \subset K'$ algebraisch. Außerdem ist natürlich insbesondere jedes $a \in L$ algebraisch über K ; damit ist auch $K \subset L$ algebraisch.

Seien jetzt $K \subset L$ und $L \subset K'$ algebraisch, und sei $a \in K'$. Da a nach Annahme algebraisch ist über L , gibt es ein normiertes Polynom $h \in L[X]$ mit $h(a) = 0$; sei $n = \deg(h)$. Seien $h_0, h_1, \dots, h_{n-1} \in L$ die Koeffizienten von h (ohne $h_n = 1$). Da $K \subset L$ algebraisch ist, gilt mit Satz 6.3 und wiederholter Anwendung von Lemma 5.13, dass $L' = K(h_0, h_1, \dots, h_{n-1})$ über K endlich ist. Wegen $h \in L'[X]$ gilt auch $[L'(a) : L'] < \infty$. Es folgt

$$[K(a) : K] \leq [L'(a) : K] = [L'(a) : L'] \cdot [L' : K] < \infty,$$

also ist (wieder nach Satz 6.3) a algebraisch über K . □

6.13. Folgerung. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung, sei K' ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $\bar{K} \subset K'$ der algebraische Abschluss von K in K' . Dann ist \bar{K} ebenfalls algebraisch abgeschlossen.

FOLG
algebraischer
Abschluss

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jedes nicht konstante Polynom $f \in \bar{K}[X]$ eine Nullstelle in \bar{K} hat. Da K' algebraisch abgeschlossen ist, hat f jedenfalls eine Nullstelle $a \in K'$. Als Nullstelle eines Polynoms in $\bar{K}[X]$ ist a algebraisch über \bar{K} . Nach Satz 6.12 ist a dann auch algebraisch über K , also liegt a in \bar{K} . \square

* **6.14. Definition.** Ist K ein Körper und $K \subset K'$ eine algebraische Körpererweiterung, sodass K' algebraisch abgeschlossen ist, dann heißt K' ein *algebraischer Abschluss* von K . \diamond

DEF
algebraischer
Abschluss

Man kann zeigen, dass es für jeden Körper einen algebraischen Abschluss gibt, und dass dieser bis auf Isomorphie als Körpererweiterung von K eindeutig bestimmt ist; siehe zum Beispiel [Fi, § III.2.5] oder [KM, § 23].

6.15. Beispiel. Aus Folgerung 6.13 ergibt sich, dass der in Beispiel 6.11 eingeführte Körper \mathbb{A} der algebraischen Zahlen ein algebraischer Abschluss von \mathbb{Q} ist.

BSP
Alg. Abschluss
von \mathbb{Q}

7. ZERFÄLLUNGSKÖRPER

Bisher haben wir stets „bereits vorhandene“ Körpererweiterungen $K \subset K'$ betrachtet und (zum Beispiel) Elemente von K' studiert. Man kann sich jedoch auch fragen, ob es zu gegebenem Körper K eine Körpererweiterung gibt, die Nullstellen gewisser Polynome enthält, und wie man eine solche gegebenenfalls konstruiert. Der Beweis von Satz 6.3 weist dazu den Weg.

7.1. Satz. *Sei K ein Körper und sei $f \in K[X]$ normiert und irreduzibel. Dann gibt es eine Körpererweiterung $K \subset K'$ mit $[K' : K] = \deg(f)$, sodass f in K' eine Nullstelle hat.*

Ein solcher Erweiterungskörper kann konstruiert werden als $K' = K[X]/\langle f \rangle_{K[X]}$.

Diese Konstruktion von K' wird auch als **Kronecker-Konstruktion** bezeichnet.

Beweis. Wir definieren $K' = K[X]/\langle f \rangle_{K[X]}$ wie angegeben. Weil f irreduzibel ist, ist $\langle f \rangle_{K[X]}$ ein maximales Ideal im Hauptidealring $K[X]$; deshalb ist K' ein Körper. Wir schreiben den kanonischen Epimorphismus $\phi: K[X] \rightarrow K'$ als $h \mapsto [h]$. Sei $a = [X]$ das Bild von X in K' , dann gilt

$$f(a) = f([X]) = f(\phi(X)) = \phi(f) = [f] = [0],$$

also hat f in K' die Nullstelle a . Damit ist f das Minimalpolynom von a über K ; die Aussage $[K' : K] = [K(a) : K] = \deg(f)$ folgt. \square

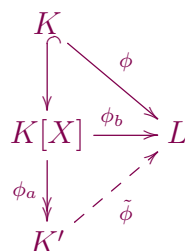
Man sieht hieran die Mächtigkeit algebraischer Konstruktionen, die es einem erlaubt, sich algebraische Strukturen fast „nach Wunsch“ zu basteln.

Für den Vergleich von Körpererweiterungen, in denen ein gegebenes irreduzibles Polynom eine Nullstelle hat, ist folgende Aussage nützlich.

7.2. Satz. *Sei K ein Körper und sei $f \in K[X]$ normiert und irreduzibel. Seien $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und $a \in K'$ mit $f(a) = 0$ und $K' = K(a)$ (zum Beispiel wie in Satz 7.1 mit $a = [X]$). Sei L ein weiterer Körper, $\phi: K \rightarrow L$ ein Homomorphismus und $b \in L$ eine Nullstelle von \tilde{f} , wobei $\tilde{f} \in L[X]$ durch Anwendung von ϕ auf die Koeffizienten von f entsteht. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\tilde{\phi}: K' \rightarrow L$ mit $\tilde{\phi}|_K = \phi$ und $\tilde{\phi}(a) = b$.*

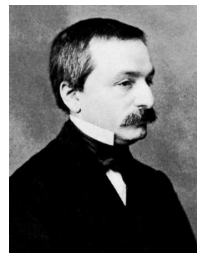
Insbesondere gibt es genau $\#\{b \in L \mid \tilde{f}(b) = 0\}$ Homomorphismen $\tilde{\phi}: K' \rightarrow L$ mit $\tilde{\phi}|_K = \phi$.

Beweis. Der durch $X \mapsto a \in K'$ gegebene Einsetzungshomomorphismus ϕ_a ist surjektiv. Wir betrachten folgendes Diagramm:



Für $\tilde{\phi}$ mit den gewünschten Eigenschaften ist $\phi_b = \tilde{\phi} \circ \phi_a$ ein Homomorphismus $K[X] \rightarrow L$ mit $\phi_b|_K = \phi$ und $\phi_b(X) = \tilde{\phi}(a) = b$. Nach der universellen Eigenschaft

SATZ
Existenz von
Körper-
erweiterungen



L. Kronecker
1823–1891

SATZ
Fortsetzung
von Homo-
morphis-
men

des Polynomrings gibt es genau einen solchen Ringhomomorphismus ϕ_b . Da ϕ_a surjektiv ist, ist $\tilde{\phi}$ durch ϕ_b eindeutig bestimmt. Das zeigt die Eindeutigkeit.

Umgekehrt sei ϕ_b dieser Homomorphismus. Da $\phi_b(f) = \tilde{f}(b) = 0$ ist, gilt $\ker(\phi_b) \supset \langle f \rangle_{K[X]}$. Also induziert ϕ_b einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\tilde{\phi}$ mit den gewünschten Eigenschaften. Das zeigt die Existenz.

Für jede Fortsetzung $\tilde{\phi}: K' \rightarrow L$ von ϕ muss gelten $\tilde{f}(\tilde{\phi}(a)) = \tilde{\phi}(f(a)) = \tilde{\phi}(0) = 0$, a muss also auf eine Nullstelle von \tilde{f} in L abgebildet werden. Nach dem bereits Bewiesenen gibt es zu jeder solchen Nullstelle genau ein passendes $\tilde{\phi}$. \square

7.3. Beispiel. Man kann zum Beispiel mit diesem Ergebnis leicht sehen, dass $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und $\mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$ mit $\omega = e^{2\pi i/3}$ isomorph sind (obwohl der erste Körper in \mathbb{R} enthalten ist und der zweite nicht). Dazu wenden wir Satz 7.2 an mit $K = \mathbb{Q}$, $f = X^3 - 2$, $K' = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $a = \sqrt[3]{2}$, $L = \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$, $b = \omega\sqrt[3]{2}$ und $\phi: \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$. Da ϕ auf \mathbb{Q} die Identität ist, ist hier $\tilde{f} = f$. Wir erhalten einen Homomorphismus $\tilde{\phi}: \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\omega\sqrt[3]{2})$. Da $\tilde{\phi}$ eine injektive \mathbb{Q} -lineare Abbildung zwischen \mathbb{Q} -Vektorräumen gleicher endlicher Dimension (hier 3) ist, muss $\tilde{\phi}$ auch bijektiv und damit ein Isomorphismus sein. \clubsuit

BSP
isomorphe
Körper-
erweiterungen

Durch Iteration der Konstruktion von Satz 7.1 können wir erreichen, dass ein gegebenes Polynom in Linearfaktoren zerfällt.

*** 7.4. Definition.** Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein normiertes Polynom. Ist $K \subset K'$ eine Körpererweiterung, sodass f in $K'[X]$ in Linearfaktoren zerfällt und K' über K von den Nullstellen von f erzeugt wird, dann heißt K' ein *Zerfällungskörper* von f über K . \diamond

DEF
Zerfällungs-
körper

7.5. Satz. Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein normiertes Polynom. Dann gibt es einen Zerfällungskörper K' von f über K . Es gilt $[K' : K] \leq \deg(f)!$.

SATZ
Existenz und
Eindeutigkeit
des
Zerfällungs-
körpers

Ist K'' ein weiterer Zerfällungskörper von f über K , dann gibt es einen Isomorphismus $\psi: K' \rightarrow K''$ mit $\psi|_K = \text{id}_K$.

Wegen der Eindeutigkeit bis auf Isomorphie spricht man auch gerne von „dem“ Zerfällungskörper von f über K .

Beweis. Der Existenzbeweis geht durch Induktion über den Grad n von f (jeweils gleichzeitig für alle Körper K). Im Fall $n = 0$ ist nichts zu zeigen, denn $K' = K$ ist der einzige Zerfällungskörper. Sei also $n > 0$. Wir schreiben $f = gh$ mit einem normierten irreduziblen Polynom $g \in K[X]$. Nach Satz 7.1 gibt es eine Körpererweiterung $K \subset K_1 = K(a)$, sodass wir in $K_1[X]$ die Zerlegung $g = (X - a)g_1$ haben. Das Polynom $f_1 = g_1h \in K_1[X]$ hat Grad $n - 1$. Nach Induktionsannahme gibt es einen Zerfällungskörper K' von f_1 über K_1 . Dann ist K' auch ein Zerfällungskörper von f über K , denn die Nullstellen von f , nämlich a und die Nullstellen von f_1 , liegen alle in K' , und K' wird über $K_1 = K(a)$ von den Nullstellen von f_1 erzeugt, also wird K' über K von den Nullstellen von f erzeugt. Ebenfalls nach Induktionsannahme haben wir $[K' : K_1] \leq (n - 1)!$, also $[K' : K] = [K' : K_1] \cdot [K_1 : K] = [K' : K_1] \cdot \deg(g) \leq (n - 1)! \cdot n = n!$.

Zur Eindeutigkeit: Seien K' und K'' zwei Zerfällungskörper von f über K . Wir zeigen, dass es einen Homomorphismus $\psi: K' \rightarrow K''$ gibt mit $\psi|_K = \text{id}_K$. Dann folgt ebenso, dass es einen Homomorphismus $\psi': K'' \rightarrow K'$ gibt mit $\psi'|_K = \text{id}_K$.

Als Homomorphismen zwischen Körpern sind ψ und ψ' injektiv. Also sind auch die Kompositionen $\psi' \circ \psi: K' \rightarrow K'$ und $\psi \circ \psi': K'' \rightarrow K''$ injektiv und K -linear. Da K' und K'' endlich-dimensionale K -Vektorräume sind, sind sowohl $\psi' \circ \psi$ als auch $\psi \circ \psi'$ bijektiv. Dann muss ψ ein Isomorphismus sein.

Der Homomorphismus ψ wird schrittweise konstruiert. Sei ψ schon auf dem Zwischenkörper L von $K \subset K'$ definiert (zu Beginn ist $L = K$); wir haben also $\psi_L: L \rightarrow K''$ mit $\psi_L|_K = \text{id}_K$. Wir faktorisieren f in $L[X]$ in normierte irreduzible Faktoren. Sind diese alle linear, dann muss $L = K'$ sein, und wir sind fertig. Anderenfalls sei h ein irreduzibler Faktor vom Grad ≥ 2 . Sei $\tilde{h} \in K''[X]$ das Polynom, das durch Anwendung von ϕ_L auf die Koeffizienten von h entsteht. Seien a eine Nullstelle von h in K' und b eine Nullstelle von \tilde{h} in K'' , und sei $L' = L(a)$. Dann gibt es nach Satz 7.2 eine (eindeutig bestimmte) Fortsetzung $\psi_{L'}: L' \rightarrow K''$ von ψ_L mit $\psi_{L'}(a) = b$. Da $L' \neq L$ ist, gilt $[L' : K] > [L : K]$. Weil $[K' : K]$ endlich ist, müssen wir nach endlich vielen Schritten $L = K'$ erreichen. \square

Man kann sich vorstellen, dass man durch „unendliche Iteration“ der Konstruktion von Zerfällungskörpern einen algebraischen Abschluss von K erzeugen kann. Die technischen Details dieser Konstruktion sind allerdings recht kompliziert.

Aus der zweiten Aussage in Satz 7.2 folgt im Fall, dass f keine mehrfachen Nullstellen (in K'') hat, dass es genau $[K' : K] = [K'' : K]$ Isomorphismen $\psi: K' \rightarrow K''$ mit $\psi|_K = \text{id}_K$ gibt. (Im Beweis oben gibt es beim Schritt von L zu L' genau $[L' : L]$ Möglichkeiten, den Homomorphismus fortzusetzen; die Behauptung folgt durch Induktion.) Man kann das auf $K'' = K'$ anwenden und erhält die Aussage, dass die Körpererweiterung $K \subset K'$ genau $[K' : K]$ Automorphismen hat (das sind Körperautomorphismen von K' , die auf K die Identität induzieren). Das ist die maximal mögliche Anzahl. Körpererweiterungen mit der Eigenschaft, dass sie diese Maximalzahl an Automorphismen haben, heißen *Galois-Erweiterungen*; wir werden sie noch genauer studieren.

7.6. Beispiele.

- (1) Ein Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über \mathbb{Q} ist $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$. Denn die Nullstellen von $X^n - 1$ sind ζ_n^j mit $j = 0, 1, \dots, n-1$; sie liegen also alle in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$. Auf der anderen Seite wird $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ von den Nullstellen (sogar schon von einer Nullstelle) erzeugt. Der Körper $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ heißt der *n -te Kreisteilungskörper* (weil die Nullstellen von $X^n - 1$ den Einheitskreis in \mathbb{C} in n gleiche Teile teilen).
- (2) Ein Zerfällungskörper von $X^5 - 7$ über \mathbb{Q} ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}, \zeta_5)$. Die Nullstellen sind von der Form $\alpha_j = \zeta_5^j \sqrt[5]{7}$ für $j = 0, 1, 2, 3, 4$; sie sind also alle in K enthalten. Da K wegen $\zeta_5 = \alpha_1/\alpha_0$ von den Nullstellen erzeugt wird, ist K ein Zerfällungskörper.
- (3) Allgemeiner gilt: Ist $K \subset \bar{K}$ mit \bar{K} algebraisch abgeschlossen und ist $f \in K[X]$ normiert, dann ist $K' = K(\{\alpha \in \bar{K} \mid f(\alpha) = 0\}) \subset \bar{K}$ ein Zerfällungskörper von f über K . Denn da (nach Definition von „algebraisch abgeschlossen“) f über \bar{K} in Linearfaktoren zerfällt, gilt dies auch über K' (jeder Linearfaktor hat die Form $X - \alpha$ mit einer Nullstelle α von f in \bar{K}), und K' wird offensichtlich von den Nullstellen von f über K erzeugt. \clubsuit

BSP
Zerfällungs-
körper

DEF
Kreisteilungs-
Körper

8. ENDLICHE KÖRPER

Wir wollen uns jetzt etwas ausführlicher mit endlichen Körpern beschäftigen. Endliche Körper sind einerseits innerhalb der Mathematik wichtige Objekte, spielen andererseits aber auch für Anwendungen etwa in der Codierungstheorie und der Kryptographie eine große Rolle.

Wir wiederholen erst einmal kurz, was wir bereits über endliche Körper wissen.

8.1. **Erinnerung.** Sei F ein endlicher Körper.

- (1) Für jede Primzahl p ist $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper mit p Elementen.
- (2) $\text{char}(F) = p$ ist eine Primzahl und F enthält (eine Kopie von) \mathbb{F}_p (Lemma 5.8).
- (3) $\#F = p^e$ mit $e \geq 1$ (Beispiel 5.10).
- (4) In F gilt $(x + y)^p = x^p + y^p$ („Freshman’s Dream“¹) (und natürlich auch $(xy)^p = x^p y^p$).
- (5) Die multiplikative Gruppe F^\times von F ist zyklisch (Satz 4.11).

Die vorletzte Aussage gilt für jeden Körper F mit $\text{char}(F) = p$. Sie ergibt sich wie folgt: Es ist nach dem Binomialsatz

$$(x + y)^p = x^p + \binom{p}{1} x^{p-1} y + \binom{p}{2} x^{p-2} y^2 + \dots + \binom{p}{p-1} x y^{p-1} + y^p,$$

und die Binomialkoeffizienten $\binom{p}{m} = \frac{p!}{m!(p-m)!}$ sind für $0 < m < p$ durch p teilbar (denn p teilt den Zähler $p!$, aber nicht den Nenner $m!(p-m)!$). In einem Körper der Charakteristik p ist $p \cdot a = 0$ für alle a , also verschwinden oben alle Terme außer x^p und y^p .

Das legt folgende Definition nahe:

8.2. **Definition.** Sei F ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Dann ist die Abbildung $\phi_F: F \rightarrow F, x \mapsto x^p$, ein Endomorphismus von F ; ϕ_F heißt der *Frobenius-Endomorphismus* von F . Ist F endlich, dann ist ϕ_F ein Automorphismus von F und heißt der *Frobenius-Automorphismus* von F . ◇



F.G. Frobenius
1849–1917

DEF
Frobenius-
Auto-
morphismus

Dass ϕ_F ein Ringhomomorphismus ist, folgt aus Aussage (4) in 8.1. Als Homomorphismus zwischen Körpern ist ϕ_F injektiv. Ist F endlich, dann muss $\phi_F: F \rightarrow F$ sogar bijektiv sein.

Wir bezeichnen die Iterierten von ϕ_F mit ϕ_F^n , also $\phi_F^0 = \text{id}_F$ und $\phi_F^{n+1} = \phi_F^n \circ \phi_F$.

8.3. **Lemma.** Sei F ein endlicher Körper der Charakteristik $p, \#F = p^e$. Dann ist $\phi_F^e = \text{id}_F$, und für jeden Teiler f von e ist die Teilmenge

$$K_f = \{x \in F \mid \phi_F^f(x) = x\} \subset F$$

ein Teilkörper von F mit p^f Elementen. Jeder Teilkörper von F hat die Form K_f für einen Teiler f von e .

LEMMA
Teilkörper
endlicher
Körper

¹Freshman = Studienanfänger

Beweis. Die multiplikative Gruppe F^\times von F hat $p^e - 1$ Elemente, also gilt für alle $x \in F^\times$, dass $x^{p^e-1} = 1$ ist. Daraus folgt $x^{p^e} = x$, also $\phi_F^e(x) = \text{id}_F(x)$ für alle $x \in F$. (Vergleiche den kleinen Satz von Fermat; das ist der Spezialfall $F = \mathbb{F}_p$.)

Sei jetzt f ein Teiler von e . Dann ist K_f ein Teilkörper von F — das gilt für die Menge der Fixpunkte jedes Körperautomorphismus (Übung). Die Elemente von K_f sind genau die Nullstellen von $X^{p^f} - X$. Es gilt $p^f - 1 \mid p^e - 1$ (denn mit $e = fg$ ist $p^e - 1 = (p^f)^g - 1 \equiv 1^g - 1 = 0 \pmod{p^f - 1}$); daraus folgt $X^{p^f-1} - 1 \mid X^{p^e-1} - 1$, also ist auch $X^{p^f} - X$ ein Teiler von $X^{p^e} - X$ im Polynomring $F[X]$. Da $X^{p^e} - X$ p^e verschiedene Nullstellen in F hat, muss auch $X^{p^f} - X$ p^f verschiedene Nullstellen in F haben, also ist $\#K_f = p^f$.

Sei schließlich $K \subset F$ ein Teilkörper. Dann gilt $\#K = p^f$ mit geeignetem f ; wegen $f \cdot [F : K] = e$ muss f ein Teiler von e sein. Die erste Aussage dieses Lemmas zeigt dann, dass $\phi_K^f = \phi_F^f|_K$ die Identität von K ist. Das bedeutet $K \subset K_f$, und weil beide Seiten die gleiche Anzahl von Elementen haben, muss $K = K_f$ gelten. \square

Wir haben uns jetzt zwar schon einmal einen Überblick über die Teilkörper eines endlichen Körpers verschafft, aber wir wissen immer noch nicht, ob es auch zu jeder Primzahlpotenz p^e einen endlichen Körper mit p^e Elementen gibt. (Aus dem eben bewiesenen Lemma folgt nur, dass mit dem Exponenten e auch jeder Teiler von e vorkommen muss.) Um diese Frage zu beantworten, verwenden wir die Existenz von Zerfällungskörpern und lassen uns von der Beschreibung der Teilkörper in Lemma 8.3 inspirieren.

8.4. Satz. *Sei F ein endlicher Körper mit $\#F = q = p^e$ und sei $n \geq 1$. Dann gibt es eine Körpererweiterung $F \subset F'$ mit $[F' : F] = n$. Jeder solche Körper ist ein Zerfällungskörper von $X^{q^n} - X$ über F ; insbesondere sind alle solche Körpererweiterungen von F isomorph (d.h., es gibt einen Isomorphismus, der auf F die Identität ist).*

SATZ
Existenz von
Erweiterungen
endlicher
Körper

Beweis. Ist $F \subset F'$ eine beliebige Körpererweiterung mit $[F' : F] = n$, dann ist $\phi_{F'}^{en} = \text{id}_{F'}$ nach Lemma 8.3, also sind die Elemente von F' genau die Nullstellen von $f = X^{q^n} - X = X^{p^{en}} - X$. Insbesondere ist F' ein Zerfällungskörper von f über F . Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus Satz 7.5.

Sei F' ein Zerfällungskörper von f über F ; so ein F' existiert nach Satz 7.5. Dann ist F' von endlichem Grad über F , also ebenfalls endlich. Die Menge der Fixpunkte von $\phi_{F'}^{en}$ bildet einen Teilkörper F'' von F' . Diese Fixpunkte sind gerade die Nullstellen von f in F' , wovon es genau q^n gibt (denn f hat wegen $f' = -1$ keine mehrfachen Nullstellen). Es folgt $F'' = F'$ und $[F' : F] = n$. \square

* **8.5. Folgerung.** *Seien p eine Primzahl und $e \geq 1$. Dann gibt es Körper F mit $\#F = p^e$. Jeder solche Körper ist ein Zerfällungskörper von $X^{p^e} - X$ über \mathbb{F}_p ; insbesondere sind alle Körper mit p^e Elementen isomorph.*

FOLG
Existenz
endlicher
Körper

Beweis. Wir wenden Satz 8.4 auf $F = \mathbb{F}_p$ an. \square

Man schreibt daher gerne \mathbb{F}_q für „den“ Körper mit $q = p^e$ Elementen.

8.6. Lemma. *Sei $F \subset F'$ eine Körpererweiterung mit F' endlich. Dann ist diese Erweiterung einfach (d.h., es gibt $\alpha \in F'$ mit $F' = F(\alpha)$).*

LEMMA
Erweiterungen
endlicher
Körper
sind einfach

Beweis. Die Gruppe F'^{\times} ist nach Satz 4.11 zyklisch; sei $\alpha \in F'^{\times}$ ein Erzeuger. Dann ist $F' = F(\alpha)$, denn $F' = \{0\} \cup \{\alpha^n \mid 0 \leq n < \#F' - 1\}$. \square

Aus Satz 8.4 und Lemma 8.6 können wir nun Schlüsse über die Existenz von irreduziblen Polynomen vorgegebenen Grades über einem endlichen Körper ziehen.

8.7. Satz. *Seien F ein endlicher Körper und $n \geq 1$. Dann gibt es mindestens ein normiertes irreduzibles Polynom $f \in F[X]$ vom Grad n .*

SATZ
Existenz
irreduzibler
Polynome

Beweis. Sei $q = \#F = p^e$. Nach Satz 8.4 gibt es eine Körpererweiterung F' von F vom Grad n . Nach Lemma 8.6 ist F' eine einfache Erweiterung von F . Sei $\alpha \in F'$ ein primitives Element (also $F' = F(\alpha)$) und sei $f \in F[X]$ das Minimalpolynom von α . Dann gilt $\deg(f) = [F(\alpha) : F] = [F' : F] = n$ und f ist irreduzibel und normiert. \square

Für $F = \mathbb{F}_2$ und $n = 2$ gibt es tatsächlich nur ein (normiertes) irreduzibles Polynom vom Grad n , nämlich $X^2 + X + 1$. Im Allgemeinen gibt es jedoch mehr. Wir wollen im Rest dieses Abschnitts eine Formel für ihre Anzahl herleiten.

(Der folgende Text wurde aus Zeitgründen nicht in der Vorlesung präsentiert, mit Ausnahme von Definition 8.12 und Folgerung 8.14.)

Dazu beweisen wir erst noch zwei vorbereitende Aussagen.

8.8. Lemma. *Seien F ein endlicher Körper, $q = p^e = \#F$ und $f \in F[X]$ normiert und irreduzibel mit $\deg(f) = n$. Sei F' eine Körpererweiterung von F vom Grad n . Dann hat f in F' eine Nullstelle α und in $F'[X]$ gilt*

LEMMA
irred. Polynom
vom Grad n
zerfällt in
Erweiterung
vom Grad n

$$f = (X - \alpha)(X - \alpha^q)(X - \alpha^{q^2}) \cdots (X - \alpha^{q^{n-1}}).$$

Insbesondere ist F' ein Zerfällungskörper von f über F .

Beweis. Nach Satz 7.1 gibt es eine Körpererweiterung F'' von F vom Grad n , in der f eine Nullstelle hat. Nach Satz 8.4 sind F' und F'' isomorph als Körpererweiterungen von F . Es folgt, dass f in F' eine Nullstelle α hat. Sei jetzt $\beta \in F'$ irgendeine Nullstelle von f . Dann gilt

$$0 = \phi_{F'}^e(0) = \phi_{F'}^e(f(\beta)) = f(\phi_{F'}^e(\beta)) = f(\beta^q),$$

denn $\phi_{F'}^e$ ist nach Lemma 8.3 auf F , also auf den Koeffizienten von f , die Identität. Also ist auch β^q eine Nullstelle von f . Induktiv erhalten wir also, dass alle α^{q^m} für $m = 0, 1, 2, \dots$ Nullstellen von f sind.

Da $\phi_{F'}^e: x \mapsto x^q$ bijektiv und F' endlich ist, muss die Folge $(\alpha, \alpha^q, \alpha^{q^2}, \dots)$ von Beginn an periodisch sein. Da $\phi_{F'}^{en}$ nach Lemma 8.3 die Identität auf F' ist, ist die (minimale) Periode ein Teiler von n . Wäre sie ein echter Teiler m von n , dann wäre α in der Fixpunktmenge von $\phi_{F'}^{em}$ enthalten, also in einer Körpererweiterung vom Grad m von F . Das wäre aber ein Widerspruch dazu, dass das Minimalpolynom von α Grad n hat, vergleiche Folgerung 6.5. Also ist die Periode genau n ; damit sind die ersten n Glieder der Folge paarweise verschieden. Da diese n Elemente allesamt Nullstellen von f sind, müssen es alle Nullstellen von f sein, und die behauptete Faktorisierung folgt. Da $F' = F(\alpha)$ von den Nullstellen von f erzeugt wird, ist F' ein Zerfällungskörper von f über F . \square

8.9. Lemma. *Seien F ein endlicher Körper, $q = \#F$ und $n \geq 1$. Dann gilt*

$$X^{q^n} - X = \prod_f f$$

in $F[X]$, wobei das Produkt über alle normierten irreduziblen Polynome $f \in F[X]$ mit $\deg(f) \mid n$ läuft.

LEMMA
Faktorisierung
von $X^{q^n} - X$

Beweis. Wir haben bereits gesehen, dass $h = X^{q^n} - X$ insgesamt q^n verschiedene Nullstellen in F' hat, wobei F' der Zerfällungskörper von h über F ist. Außerdem gilt $[F' : F] = n$. Da alle Elemente von F' Nullstellen von h sind, gilt in $F'[X]$ die Faktorisierung

$$h = X^{q^n} - X = \prod_{\alpha \in F'} (X - \alpha).$$

Sei $\alpha \in F'$. Dann ist $[F(\alpha) : F]$ ein Teiler von n , also ist der Grad des Minimalpolynoms f von α ein Teiler von n . Damit ist f ein Faktor im Produkt auf der rechten Seite. Dieses Argument zeigt, dass jede Nullstelle von h auch Nullstelle des Produkts ist, also teilt h das Produkt. Sei jetzt umgekehrt $f \in F[X]$ ein normiertes irreduzibles Polynom mit $m = \deg(f) \mid n$. Es gibt einen Zwischenkörper $F \subset K \subset F'$ mit $[K : F] = m$. Nach Lemma 8.8 ist K ein Zerfällungskörper von f über F , also zerfällt f auch über F' in (paarweise verschiedene) Linearfaktoren. Das zeigt, dass f ein Teiler von h ist. Da verschiedene normierte irreduzible Polynome paarweise teilerfremd sind, folgt, dass das Produkt auf der rechten Seite ein Teiler von h ist. Da beide Seiten normiert sind und sich gegenseitig teilen, müssen sie gleich sein. \square

Aus dieser Faktorisierung können wir nun leicht folgende Rekursion herleiten.

8.10. Satz. *Sei F ein endlicher Körper mit $\#F = q$. Wir schreiben $a_n(q)$ für die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad n in $F[X]$. Dann gilt für alle $n \geq 1$*

$$\sum_{d \mid n} da_d(q) = q^n.$$

SATZ
Anzahl
irreduzibler
Polynome

Beweis. Die linke Seite ergibt den Grad des Produkts auf der rechten Seite der Formel in Lemma 8.9, die rechte Seite ist der Grad des Polynoms $X^{q^n} - X$ auf der linken Seite. \square

8.11. Beispiele. Für kleine Grade n erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_1(q) &= q \\ a_2(q) &= \frac{q^2 - a_1(q)}{2} = \frac{1}{2}(q^2 - q) \\ a_3(q) &= \frac{q^3 - a_1(q)}{3} = \frac{1}{3}(q^3 - q) \\ a_4(q) &= \frac{q^4 - 2a_2(q) - a_1(q)}{4} = \frac{1}{4}(q^4 - q^2) \end{aligned}$$

BSP
Anzahlen
irreduzibler
Polynome

Für $q = 2$ haben wir also $a_1(2) = 2$, $a_2(2) = 1$, $a_3(2) = 2$, $a_4(2) = 3$; vergleiche die Tabelle von irreduziblen Polynomen über \mathbb{F}_2 in EZAS.10.10. \clubsuit

Es gibt eine allgemeine Formel für $a_n(q)$. Dafür brauchen wir noch eine Definition und ein Lemma.

8.12. **Definition.** Die Möbius-Funktion $\mu: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ist definiert durch

DEF
Möbius-
Funktion \diamond

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^m & \text{falls } n = p_1 p_2 \cdots p_m \text{ mit paarweise verschiedenen Primzahlen } p_j, \\ 0 & \text{falls } n \text{ nicht quadratfrei.} \end{cases}$$

Hier ist eine kleine Tabelle:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0	-1	1	1	0

Aus der Definition ergibt sich, dass aus $m \perp n$ die Beziehung $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$ folgt.

8.13. **Lemma.** Sei R ein Ring und seien $(a_n)_{n \geq 1}$ und $(b_n)_{n \geq 1}$ zwei Folgen von Elementen von R . Dann gilt

LEMMA
Möbius-
Inversion

$$\forall n \geq 1: \sum_{d|n} a_d = b_n \iff \forall n \geq 1: \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) b_d = a_n.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Der Fall $n = 1$ ist klar. Seien also $n > 1$ und p ein Primteiler von n ; sei $n = mp^e$ mit $p \nmid m$. Dann sind die Teiler von n gegeben durch $d = lp^f$ mit $l | m$ und $0 \leq f \leq e$, und wir haben

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{l|m} \sum_{f=0}^e \mu(lp^f) = \sum_{l|m} \sum_{f=0}^e \mu(l)\mu(p^f) \\ &= \left(\sum_{l|m} \mu(l) \right) \left(\sum_{f=0}^e \mu(p^f) \right) = \left(\sum_{l|m} \mu(l) \right) (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Für die Implikation „ \Rightarrow “ setzen wir die Definition von b_n ein:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) b_d &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \sum_{l|d} a_l = \sum_{l|n} a_l \sum_{d: l|d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{l|n} a_l \sum_{m|\frac{n}{l}} \mu(m) = a_n \end{aligned}$$

(wir benutzen, dass die n/d genau die Teiler von n/l durchlaufen). Der Beweis von „ \Leftarrow “ ist ähnlich. \square

8.14. **Folgerung.** Es gilt

FOLG
Formel
für $a_n(q)$

$$a_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) q^{n/d}.$$

Beweis. Anwendung von Lemma 8.13 auf $a_n := na_n(q)$ und $b_n := q^n$. \square

Zum Beispiel gilt

$$a_6(q) = \frac{1}{6}(q^6 - q^3 - q^2 + q).$$

Es gibt also genau $a_6(2) = 9$ verschiedene irreduzible Polynome vom Grad 6 über \mathbb{F}_2 . (Über \mathbb{F}_2 ist jedes Polynom $\neq 0$ normiert.)

9. KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass sich die Theorie der Körpererweiterungen auf ein geometrisches Problem anwenden lässt; man kann sie nämlich dazu benutzen, um zu entscheiden, ob gewisse Konstruktionen mit Zirkel und Lineal möglich sind oder nicht.

Dazu erinnern wir uns daran, was bei einer „Konstruktion mit Zirkel und Lineal“ erlaubt ist. Wir beginnen mit einer Menge S gegebener Punkte in der Ebene. Wir können dann schrittweise weitere Punkte und dazu Geraden und Kreise konstruieren:

- Die Gerade durch zwei (verschiedene) bereits konstruierte Punkte.
- Der Kreis um einen bereits konstruierten Punkt mit Radius gleich dem Abstand zweier bereits konstruierter Punkte.
- Die Schnittpunkte von zwei bereits konstruierten Geraden oder Kreisen.

Als ersten Schritt zur „Algebraisierung“ führen wir (kartesische) Koordinaten der Ebene ein. Wenn wir davon ausgehen, dass wir mit mindestens zwei gegebenen Punkten starten, können wir die Koordinaten so wählen, dass einer der Punkte der Ursprung und ein anderer der Punkt $(1, 0)$ auf der x -Achse ist, dass also S die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ enthält.

Wir überlegen jetzt, wie sich die Konstruktion von Punkten algebraisch niederschlägt. Eine erste Beobachtung ist, dass sich ein Punkt (x, y) genau dann ausgehend von S konstruieren lässt, wenn das für die Punkte $(x, 0)$ und $(y, 0)$ gilt. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $S = S' \times \{0\}$ ist mit einer Teilmenge $S' \subset \mathbb{R}$ (bestehend aus den x - und y -Koordinaten der Punkte aus S). Im Folgenden schreiben wir der Einfachheit halber S für die Menge S' .

* **9.1. Definition.** Wir nennen eine reelle Zahl α *konstruierbar aus $S \subset \mathbb{R}$* , wenn sich $(\alpha, 0)$ ausgehend von $S \times \{0\}$ konstruieren lässt. Wir sagen, α sei *konstruierbar*, wenn α aus $\{0, 1\}$ konstruierbar ist. \diamond

DEF
konstruierbar

9.2. Lemma. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ aus $S \subset \mathbb{R}$ (mit $0, 1 \in S$) konstruierbar. Dann kann α als Ausdruck in den Elementen von S geschrieben werden, der nur die vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln enthält.

LEMMA
notwendige
Bedingung für
Konstruier-
barkeit

Formaler ausgedrückt: Es gibt einen Körperturm

$$\mathbb{Q}(S) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

mit $\alpha \in K_n$ und $[K_m : K_{m-1}] = 2$ für alle $m = 1, \dots, n$. Insbesondere ist α algebraisch über $\mathbb{Q}(S)$ und $[\mathbb{Q}(S, \alpha) : \mathbb{Q}(S)]$ ist eine Zweierpotenz.

Die Umkehrung der letzten Aussage gilt nicht: Daraus, dass $[\mathbb{Q}(S, \alpha) : \mathbb{Q}(S)]$ eine Zweierpotenz ist, folgt im Allgemeinen nicht, dass α aus S konstruierbar ist.



Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Koordinaten der Schnittpunkte von Geraden und/oder Kreisen, die durch bereits konstruierte Punkte P_j definiert sind, sich in der geforderten Weise durch die Koordinaten (x_j, y_j) der P_j ausdrücken lassen. Die Aussage folgt dann durch Induktion über die Anzahl der Konstruktionsschritte. Wir müssen drei Fälle betrachten:

- (1) Schnitt zweier Geraden. Die Geraden seien die Geraden durch die Punkte P_1 und P_2 und durch die Punkte P_3 und P_4 . Ein Punkt $P = (x, y)$ liegt genau dann auf der Geraden durch P_1 und P_2 , wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

und analog für die Gerade durch P_3 und P_4 . Dies ergibt ein lineares Gleichungssystem für x und y , dessen (eindeutige, denn die Geraden sind verschieden) Lösung durch rationale Ausdrücke in den Koeffizienten gegeben ist. Diese Koeffizienten sind wiederum Polynome in den x_j und y_j . Somit sind die Koordinaten des Schnittpunkts mittels der vier Grundrechenarten aus den Koordinaten der P_j zu berechnen.

- (2) Schnitt von Gerade und Kreis. Die Gerade sei durch P_1 und P_2 gegeben, der Kreis habe Mittelpunkt P_3 und Radius $|P_4P_5|$. Wir erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + x_1y_2 - x_2y_1 &= 0 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (x_4 - x_5)^2 - (y_4 - y_5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Es hat die Form

$$ax + by + c = x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0,$$

wobei a, b, c, d, e, f rationale Ausdrücke in den Koordinaten der P_j sind. Wir können die erste Gleichung nach x oder y auflösen (denn a und b können nicht beide null sein) und dann in die zweite einsetzen. Das liefert eine quadratische Gleichung in y oder x , deren Lösungen (soweit existent) sich nach der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen durch rationale Ausdrücke und das Ziehen einer (reellen) Quadratwurzel erhalten lassen.

- (3) Schnitt zweier Kreise. Wir erhalten zwei Gleichungen der Form

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0.$$

Wir können annehmen, dass die Kreise nicht konzentrisch sind (sonst gibt es keinen Schnittpunkt oder die Kreise sind identisch); das bedeutet $(a, b) \neq (a', b')$. Durch Subtraktion erhalten wir die *lineare* Gleichung

$$(a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0.$$

(Sie beschreibt die Gerade durch die beiden Schnittpunkte der Kreise.) Den resultierenden Fall (eine lineare und eine quadratische Gleichung) haben wir aber bereits behandelt.

Sei K der von den bisher konstruierten Zahlen erzeugte Teilkörper von \mathbb{R} . Zu Beginn der Konstruktion ist $K = \mathbb{Q}(S)$. Rationale Operationen ergeben wieder Elemente von K . Wenn wir eine Quadratwurzel ziehen, dann adjungieren wir eine Nullstelle von $X^2 - \beta$ für ein Element $\beta \in K$. Der resultierende Körper $K' = K(\sqrt{\beta})$ ist entweder gleich K (wenn β ein Quadrat in K ist) oder hat Grad 2 über K . So erhalten wir schrittweise den Turm von quadratischen Erweiterungen, sodass der letzte Körper das Element α enthält.

Da $\mathbb{Q}(S, \alpha) \subset K_n$ und

$$[K_n : \mathbb{Q}(S)] = [K_1 : K_0] \cdot [K_2 : K_1] \cdots [K_n : K_{n-1}] = 2^n < \infty$$

ist, folgt, dass α als Element einer endlichen Körpererweiterung von $\mathbb{Q}(S)$ über $\mathbb{Q}(S)$ algebraisch ist. Außerdem gilt $[\mathbb{Q}(S, \alpha) : \mathbb{Q}(S)] \mid [K_n : \mathbb{Q}(S)] = 2^n$, also ist der Grad von $\mathbb{Q}(S, \alpha)$ über $\mathbb{Q}(S)$ eine Zweierpotenz. \square

Damit können wir bereits die Unlösbarkeit mehrerer klassischer Probleme zeigen.

9.3. Folgerung. *Die Zahl $\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar.*

FOLG
Würfel-
verdopplung

Beweis. $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel nach Eisenstein, also ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ und damit keine Zweierpotenz. Nach Lemma 9.2 ist $\sqrt[3]{2}$ also nicht konstruierbar. \square

Dahinter steht das sogenannte „Delische Problem“ der **Würfelverdopplung**. Der Name geht auf eine Legende zurück: Die Insel Delos wurde von einer Pestepidemie heimgesucht. In ihrer Verzweiflung befragten die Bewohner das Orakel von Delphi. Die Auskunft war, dass die Epidemie enden würde, wenn sie den würfelförmigen Altar im Tempel des Apollon im Volumen verdoppelten. Die antiken Mathematiker interpretierten das so, dass die Seitenlänge eines Würfels mit dem doppelten Volumen mit Zirkel und Lineal konstruiert werden sollte. Das Verhältnis der Seitenlängen ist gerade $\sqrt[3]{2}$. Besonders hilfreich kann der Orakelspruch also nicht gewesen sein. . .

9.4. Definition. Wir sagen, ein Winkel φ sei *konstruierbar*, wenn sein Cosinus (oder sein Sinus, beides ist äquivalent) konstruierbar ist. \diamond

DEF
konstruierbar
für Winkel

Durch Errichten des Lots auf die x -Achse im Punkt $(\cos \varphi, 0)$ und Schneiden mit dem Einheitskreis kann man leicht eine Gerade durch den Ursprung konstruieren, die mit der x -Achse den Winkel φ einschließt.

Offenbar ist ein reguläres n -Eck genau dann konstruierbar, wenn der Winkel $\frac{2\pi}{n}$ konstruierbar ist.

9.5. Folgerung. *Der Winkel $\frac{2\pi}{9}$ (das entspricht 40°) ist nicht konstruierbar. Also ist das reguläre Neuneck nicht konstruierbar.*

FOLG
Neuneck
nicht
konstruierbar

Beweis. Sei $\zeta = e^{2\pi i/9} = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$. Dann ist ζ^3 eine primitive dritte Einheitswurzel, also gilt $\zeta^6 + \zeta^3 + 1 = (\zeta^3)^2 + \zeta^3 + 1 = 0$. Sei $\alpha = \zeta + \zeta^{-1} = 2 \cos \frac{2\pi}{9}$. Dann gilt

$$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = (\zeta^3 + 3\zeta + 3\zeta^{-1} + \zeta^{-3}) - 3(\zeta + \zeta^{-1}) + 1 = \zeta^{-3}(\zeta^6 + \zeta^3 + 1) = 0.$$

Das Polynom $f = X^3 - 3X + 1$ ist irreduzibel, denn es hat keine rationale Nullstelle (nur ± 1 kämen in Frage). Es folgt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = 3$. Nach Lemma 9.2 ist also α (und damit natürlich auch $\alpha/2 = \cos \frac{2\pi}{9}$) nicht konstruierbar. \square

Da der Winkel $\frac{2\pi}{3}$ sehr leicht konstruierbar ist, folgt daraus auch:

9.6. Folgerung. *Es gibt keine allgemeine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, die einen Winkel in drei gleiche Teile teilt.*

FOLG
Unmöglichkeit
der Winkel-
dreiteilung

Genauer heißt das: Es gilt nicht, dass für beliebige φ die Zahl $\cos \frac{\varphi}{3}$ aus $\{0, 1, \cos \varphi\}$ konstruierbar ist.

Beweis. Wegen $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ müsste $\cos \frac{2\pi}{9}$ (aus $\{0, 1\}$) konstruierbar sein, was aber nach Folgerung 9.5 nicht der Fall ist. \square

9.7. Folgerung. *Sei p eine ungerade Primzahl. Dann ist das reguläre p -Eck höchstens dann konstruierbar, wenn p eine Fermatsche Primzahl ist: $p = 2^{2^m} + 1$ für ein $m \geq 0$.*

FOLG
Konstruierbarkeit des regulären p -Ecks

Beweis. Die p -te Einheitswurzel $\zeta = e^{2\pi i/p}$ ist Nullstelle von

$$f = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

und f ist irreduzibel (Eisenstein für $f(X + 1)$, siehe Beispiel EZAS.10.14). Es gilt $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{p})] = 2$ (siehe Beispiel 6.9). Wenn das reguläre p -Eck konstruierbar ist, dann muss $[\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{p}) : \mathbb{Q}]$ eine Zweierpotenz sein, und damit ist auch

$$p - 1 = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = 2 [\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{p}) : \mathbb{Q}]$$

eine Zweierpotenz. p hat also die Form $2^n + 1$. Wenn $n = kl$ ist mit $k > 1$ ungerade, dann ist

$$2^n + 1 = (2^l)^k + 1 = (2^l + 1)((2^l)^{k-1} - (2^l)^{k-2} + \dots - 2^l + 1)$$

keine Primzahl. Also ist $n = 2^m$ selbst eine Zweierpotenz. □

Zum Beispiel kann man keine regulären 7-, 11- oder 13-Ecke mit Zirkel und Lineal konstruieren. Umgekehrt kann man zeigen, dass reguläre p -Ecke für Fermatsche Primzahlen p tatsächlich konstruierbar sind (Gauß 1796). Für $p = 3$ und $p = 5$ ist das seit der Antike bekannt. Gauß fand 1796 eine Konstruktion für das reguläre 17-Eck (mit neunzehn Jahren!) — daran erinnert ein siebzehnzackiger Stern an seinem Denkmal in Braunschweig. Richelot gab 1832 eine Konstruktion des regulären 257-Ecks an. „Im Jahr 1894 fand Johann Gustav Hermes nach mehr als zehnjähriger Anstrengung eine Konstruktionsvorschrift für das regelmäßige 65 537-Eck und beschrieb diese in einem Manuskript von mehr als 200 Seiten, welches sich heute in einem speziell dafür angefertigten Koffer in der Mathematischen Bibliothek der Universität Göttingen befindet.“ (Wikipedia zum 65 537-Eck)



C.F. Gauß
(1777–1855)

Weitere Fermatsche Primzahlen sind nicht bekannt. Fermat hatte einmal behauptet, alle Zahlen $2^{2^m} + 1$ seien prim. Schon Euler zeigte, dass $2^{32} + 1$ durch 641 teilbar ist. Das lässt sich wie folgt sehr schnell nachprüfen: Es ist

$$641 = 640 + 1 = 5 \cdot 2^7 + 1 \quad \text{und} \quad 641 = 625 + 16 = 5^4 + 2^4,$$

also gilt

$$2^4 \equiv -5^4 \pmod{641} \quad \text{und} \quad 5 \cdot 2^7 \equiv -1 \pmod{641}.$$

Daraus folgt

$$2^{32} = 2^4 \cdot 2^{28} \equiv -5^4 \cdot 2^{28} = -(5 \cdot 2^7)^4 \equiv -(-1)^4 = -1 \pmod{641},$$

was gerade $641 \mid 2^{32} + 1$ bedeutet.

Wie kam Euler auf 641? Wenn p ein Primteiler von $2^{2^m} + 1$ ist, dann muss gelten $2^{2^m} \equiv -1 \pmod{p}$; die Ordnung der Restklasse $[2]$ in der multiplikativen Gruppe \mathbb{F}_p^\times ist dann 2^{m+1} . (Denn $[2]^{2^{m+1}} = ([2]^{2^m})^2 = [-1]^2 = [1]$, also ist die Ordnung ein Teiler von 2^{m+1} . Wegen $[2]^{2^m} = [-1] \neq [1]$ ist die Ordnung kein Teiler von 2^m . Es bleibt nur 2^{m+1} .) Da die Ordnung jedes Elements die Gruppenordnung $\#\mathbb{F}_p^\times = p-1$ teilen muss, folgt $p \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$. Im konkreten Fall ist $m = 5$, also muss ein Primteiler p die Form $p = 64k + 1$ haben. 641 ist die fünfte Primzahl dieser Form (nach 193, 257, 449 und 577).

Tatsächlich gilt noch ein wenig mehr: Für $m \geq 2$ folgt $p \equiv 1 \pmod{8}$; nach dem 2. Ergänzungsgesetz zum Quadratischen Reziprozitätsgesetz ist dann 2 ein quadratischer Rest mod p . Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$. Dann hat $[a]$ in \mathbb{F}_p^\times die

Ordnung 2^{m+2} , da $[a]^2 = [2]$ die Ordnung 2^{m+1} hat. Es folgt $p \equiv 1 \pmod{2^{m+2}}$. Für $m = 5$ ist 641 sogar die kleinste solche Primzahl.

Sei $F_m = 2^{2^m} + 1$. Man weiß, dass F_m nicht prim ist für $5 \leq m \leq 32$ (und für etliche weitere m); ob F_{33} prim ist, ist eine offene Frage (Stand 2022).

Die Unmöglichkeit eines anderen klassischen Problems zeigt die nächste Folgerung.

9.8. Folgerung. *Die Zahl $\sqrt{\pi}$ ist nicht konstruierbar.*

FOLG
Quadratur
des Kreises

Beweis. Wäre $\sqrt{\pi}$ konstruierbar, dann wäre $\sqrt{\pi}$ und damit auch π nach Lemma 9.2 algebraisch. π ist aber transzendent (Lindemann 1882). \square

Für die „Quadratur des Kreises“ wird verlangt, zu einem Kreis mit gegebenem Radius (den wir ohne Einschränkung = 1 annehmen können) die Seitenlänge eines Quadrats mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren. Diese Seitenlänge ist gerade $\sqrt{\pi}$, also ist eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht möglich.

Wenn man zeigen will, dass gewisse Konstruktionen *möglich* sind, dann braucht man eine Umkehrung von Lemma 9.2. Tatsächlich ist es so, dass die vier Grundrechenarten und das Ziehen von Quadratwurzel durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden können. Für Addition und Subtraktion ist das klar. Für Multiplikation und Division verwendet man den Strahlensatz: Die Parallele durch den Punkt $(b, 0)$ zur Geraden durch $(1, 0)$ und $(0, a)$ schneidet die y -Achse im Punkt $(0, ab)$. Und analog schneidet die Parallele durch den Punkt $(1, 0)$ zur Geraden durch $(0, a)$ und $(b, 0)$ die y -Achse im Punkt $(0, a/b)$. Für Quadratwurzeln konstruiert man einen Kreis mit Durchmesser $1 + x$ und trägt 1 auf dem Durchmesser ab. Das Lot in diesem Punkt trifft den Kreis im Abstand \sqrt{x} , wie man mit dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die drei entstehenden rechtwinkligen Dreiecke, leicht nachrechnet. Daraus ergibt sich:

* **9.9. Satz.** *Seien $S \subset \mathbb{R}$ (mit $0, 1 \in S$) und $\alpha \in \mathbb{R}$. α ist genau dann aus S konstruierbar, wenn es einen Körperturm*

$$\mathbb{Q}(S) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

gibt, sodass $\alpha \in K_n$ ist und $[K_m : K_{m-1}] = 2$ gilt für alle $m = 1, \dots, n$.

SATZ
Kriterium
für Konstruier-
barkeit

Die Konstruierbarkeit des regulären Siebzehneckes folgt dann zum Beispiel aus der Formel von Gauß

$$-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}$$

für $16 \cos \frac{2\pi}{17}$.

10. SEPARABLE KÖRPERERWEITERUNGEN

In diesem Abschnitt werden wir separable Elemente und Erweiterungen einführen und untersuchen und insbesondere auch den „Satz vom primitiven Element“ beweisen. Wir orientieren uns hier an [KM, Kap. 24].

* **10.1. Definition.** Seien K ein Körper und $0 \neq f \in K[X]$ ein Polynom. f heißt *separabel*, wenn für jeden irreduziblen normierten Teiler h von f gilt, dass h in einem Zerfällungskörper von h (oder f) nur einfache Nullstellen hat. **DEF**
separables
Polynom \diamond

Häufig wird einfach gefordert, dass f selbst in seinem Zerfällungskörper nur einfache Nullstellen hat, was eine stärkere Einschränkung ist. Für irreduzible Polynome stimmen beide Versionen überein, und wir werden den Begriff „separabel“ fast ausschließlich im Zusammenhang mit irreduziblen Polynomen verwenden. In diesem Fall können wir Separabilität auf einfache Weise charakterisieren.



10.2. Lemma. Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ irreduzibel. f ist genau dann separabel, wenn die Ableitung $f' \neq 0$ ist. **LEMMA**
Kriterium
für separabel

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f normiert ist. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K . Ist f nicht separabel, dann hat f eine mehrfache Nullstelle α in L . Damit ist α eine Nullstelle von $f' \in K[X]$ (denn $f = (X - \alpha)^2 g$ impliziert $f' = (X - \alpha)(2g + (X - \alpha)g')$), also muss das Minimalpolynom f von α über K ein Teiler von f' sein. Auf der anderen Seite ist $\deg(f') < \deg(f)$, daher bleibt nur die Möglichkeit, dass $f' = 0$ ist. Damit ist „ \Leftarrow “ gezeigt.

Ist umgekehrt f separabel, dann sei $\alpha \in L$ eine einfache Nullstelle von f ; wir schreiben $f = (X - \alpha)g$ in $L[X]$; es ist dann $g(\alpha) \neq 0$. Dann gilt

$$f' = g + (X - \alpha)g', \quad \text{also} \quad f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0.$$

Das zeigt $f' \neq 0$. \square

Aus dem Beweis ergibt sich auch, dass entweder *alle* Nullstellen von f in L einfach sind oder *keine*.

10.3. Folgerung. Ist K ein Körper der Charakteristik 0, dann ist jedes irreduzible Polynom über K separabel. **FOLG**
Char. 0:
immer
separabel

Beweis. In Charakteristik 0 gilt für f nicht konstant, dass $\deg(f') = \deg(f) - 1$ ist; es folgt $f' \neq 0$, also ist f nach Lemma 10.2 separabel. \square

Mit unserer Definition von „separabel“ folgt daraus unmittelbar, dass *jedes* Polynom über einem Körper der Charakteristik 0 separabel ist.

10.4. Beispiel. Nicht separable Polynome sind also nicht so einfach zu finden. Das Standardbeispiel sieht wie folgt aus: Sei $K = \mathbb{F}_p(y)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_p[y]$ und sei $f = X^p - y \in K[X]$. Nach dem Eisenstein-Kriterium (mit dem Primelement $y \in \mathbb{F}_p[y]$) ist f irreduzibel. Auf der anderen Seite ist $f' = pX^{p-1} = 0$, da K Charakteristik p hat. Also ist f nicht separabel. Sei L ein Zerfällungskörper von f über K und sei $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f . Dann ist $\alpha^p = y$ und es gilt

$$(X - \alpha)^p = X^p - \alpha^p = X^p - y = f,$$

also hat f die p -fache Nullstelle α in L . ♣

Das lässt sich verallgemeinern:

10.5. Lemma. Seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $f \in K[X]$ irreduzibel. f ist genau dann nicht separabel, wenn es ein Polynom $g \in K[X]$ gibt mit $f = g(X^p)$. **LEMMA**
Separabilität
in Char. p

Beweis. Nach Lemma 10.2 genügt es, die Äquivalenz

$$f' = 0 \iff \exists g \in K[X]: f = g(X^p)$$

zu zeigen. Aus $f = g(X^p)$ folgt $f' = pX^{p-1}g'(X^p) = 0$. Für die Gegenrichtung sei $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$. Dann ist

$$f' = na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1} X^{n-2} + \dots + a_1.$$

Aus $f' = 0$ folgt $ma_m = 0$ für alle $0 \leq m \leq n$. Ist m kein Vielfaches von p , dann ist $m \neq 0$ in K , und es folgt $a_m = 0$. Also hat f die Form

$$a_{pn'} X^{pn'} + a_{p(n'-1)} X^{p(n'-1)} + \dots + a_p X^p + a_0 = g(X^p)$$

mit

$$g = a_{pn'} X^{n'} + a_{p(n'-1)} X^{n'-1} + \dots + a_p X + a_0. \quad \square$$

Wir erweitern den Begriff „separabel“ auf Elemente und Körpererweiterungen.

*** 10.6. Definition.** Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung. Ein Element $a \in K'$ heißt *separabel über K* , wenn es algebraisch über K ist und sein Minimalpolynom über K separabel ist. Die Körpererweiterung $K \subset K'$ heißt *separabel*, wenn jedes Element $a \in K'$ separabel über K ist. (Insbesondere ist jede separable Körpererweiterung algebraisch.) Anderenfalls heißt die Körpererweiterung *inseparabel*. **DEF**
(in)separable
Körper-
erweiterung

10.7. Lemma. Seien $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und $a \in K'$ algebraisch über K . **LEMMA**
Charakteri-
sierung
separabler
Elemente

- (1) Ist $\text{char}(K) = 0$, dann ist a separabel über K .
- (2) Im Fall $\text{char}(K) = p > 0$ ist a genau dann separabel über K , wenn $K(a^p) = K(a)$ ist.
- (3) a ist genau dann separabel über K , wenn die Körpererweiterung $K \subset K(a)$ separabel ist.

Beweis.

- (1) Das ergibt sich aus Folgerung 10.3.

- (2) Wir haben den Zwischenkörper $K \subset K(a^p) \subset K(a)$. Ist a separabel über K , dann ist a auch separabel über $K(a^p)$ (denn das Minimalpolynom von a über $K(a^p)$ teilt das Minimalpolynom von a über K). Sei f das Minimalpolynom von a über $K(a^p)$; dann ist f ein Teiler von $X^p - a^p \in K(a^p)[X]$, denn a ist eine Nullstelle dieses Polynoms. Auf der anderen Seite gilt in $K(a)[X]$, dass $X^p - a^p = (X - a)^p$ ist. Da f nach Annahme keine mehrfachen Nullstellen hat, folgt $f = X - a$, also $a \in K(a^p)$ und damit $K(a) = K(a^p)$.

Ist a nicht separabel über K , dann hat das Minimalpolynom h von a über K die Form $h = g(X^p)$ nach Lemma 10.5. Da h irreduzibel ist, muss auch g irreduzibel sein (eine Faktorisierung von g würde sich auf h übertragen), und da $g(a^p) = h(a) = 0$ ist, ist g das Minimalpolynom von a^p über K . Es folgt

$$[K(a) : K(a^p)] = \frac{[K(a) : K]}{[K(a^p) : K]} = \frac{\deg(h)}{\deg(g)} = p,$$

also gilt hier $K(a^p) \subsetneq K(a)$.

- (3) „ \Leftarrow “ gilt nach Definition.

Für „ \Rightarrow “ ist nur im Fall $\text{char}(K) = p > 0$ etwas zu zeigen. Sei $b \in K(a)$; es ist zu zeigen, dass b separabel über K ist. Nach Teil (2) genügt es zu zeigen, dass aus $K(a^p) = K(a)$ auch $K(b^p) = K(b)$ folgt. Wir schreiben $\phi: K' \rightarrow K'$ für den Frobenius-Endomorphismus $\lambda \mapsto \lambda^p$. Es ist dann $\phi(K(a)) = \phi(K)(a^p)$ und $\phi(K(b)) = \phi(K)(b^p)$. Da ϕ injektiv ist, folgt $[\phi(K)(a^p) : \phi(K)(b^p)] = [K(a) : K(b)]$. Da $\phi(K) \subset K$ ist, ist $K(a^p)$ das Kompositum von $K(b^p)$ und $\phi(K)(a^p)$. Nach Lemma 5.13 (2) folgt

$$[K(a) : K(b^p)] = [K(a^p) : K(b^p)] \leq [\phi(K)(a^p) : \phi(K)(b^p)] = [K(a) : K(b)]$$

und damit

$$[K(b) : K(b^p)] = \frac{[K(a) : K(b^p)]}{[K(a) : K(b)]} \leq 1,$$

woraus wie gewünscht $K(b^p) = K(b)$ folgt. \square

Körper mit der Eigenschaft, dass jede algebraische Erweiterung separabel ist, haben einen besonderen Namen.

* **10.8. Definition.** Ein Körper K heißt *vollkommen* oder *perfekt*, wenn jedes normierte irreduzible Polynom in $K[X]$ separabel ist. Dann ist auch jede algebraische Körpererweiterung von K separabel. **DEF**
vollkommen
perfekt \diamond

* **10.9. Satz.** Sei K ein Körper. **SATZ**
Satz von
Steinitz

- (1) Ist $\text{char}(K) = 0$, dann ist K vollkommen.
- (2) Im Fall $\text{char}(K) = p > 0$ ist K genau dann vollkommen, wenn $\{a^p \mid a \in K\} = K$ gilt, wenn also der Frobenius-Endomorphismus $\phi: K \rightarrow K, a \mapsto a^p$, surjektiv (und damit ein Automorphismus) ist.
- (3) Ist K endlich, dann ist K vollkommen.

Beweis.

- (1) Das folgt wieder aus Folgerung 10.3.

(2) „ \Rightarrow “: Wir nehmen an, dass ϕ nicht surjektiv ist. Dann gibt es $a \in K$ mit $a \neq b^p$ für alle $b \in K$. Wir betrachten eine Körpererweiterung L von K , in der $X^p - a$ eine Nullstelle α hat. Es gilt dann $\alpha \notin K$, aber $\alpha^p = a \in K$, also ist $K(\alpha^p) = K \subsetneq K(\alpha)$ und damit ist α nicht separabel über K nach Lemma 10.7. Damit ist K nicht vollkommen.

„ \Leftarrow “: Sei ϕ surjektiv und sei $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Wenn f nicht separabel wäre, dann gäbe es nach Lemma 10.5 ein Polynom $g \in K[X]$ mit $f = g(X^p)$. Wir schreiben $g = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, dann ist $f = a_n X^{np} + \dots + a_1 X^p + a_0$. Da ϕ surjektiv ist, gibt es $b_0, b_1, \dots, b_n \in K$ mit $b_j^p = a_j$ für $0 \leq j \leq n$. Dann ist

$$f = b_n^p X^{np} + b_{n-1}^p X^{(n-1)p} + \dots + b_1^p X^p + b_0^p = (b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0)^p,$$

und f kann nicht irreduzibel sein, ein Widerspruch. Also muss f separabel sein, und K ist vollkommen.

(3) Ist K endlich, dann gilt $\text{char}(K) = p$ für eine Primzahl p . Der Frobenius-Endomorphismus ϕ ist in diesem Fall bijektiv (siehe die Diskussion nach Definition 8.2), also ist K nach Teil (2) vollkommen. \square

10.10. Beispiel. Ein unvollkommener Körper ist also nicht so leicht zu finden. Wie Beispiel 10.4 zeigt, ist $\mathbb{F}_p(y)$ ein solcher. In jedem Fall muss es ein unendlicher Körper von Primzahlcharakteristik sein.

BSP
unvollkommener Körper \clubsuit

Wir kommen zum Satz vom primitiven Element; er besagt, dass jede endliche separable Erweiterung einfach ist. Wir behandeln den wesentlichen Schritt als Lemma vorneweg.

10.11. Lemma. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und seien $a, b \in K'$ algebraisch über K mit b separabel über K . Dann gibt es $c \in K(a, b)$ mit $K(c) = K(a, b)$.

LEMMA
 $K(a, b) = K(c)$

Beweis. $K(a, b)$ ist eine endliche Erweiterung von K . Ist K ein endlicher Körper, dann ist auch $K(a, b)$ endlich. Nach Lemma 8.6 ist die Erweiterung $K \subset K(a, b)$ dann einfach. Wir können ab jetzt also annehmen, dass K unendlich ist.

Seien f das Minimalpolynom von a und g das Minimalpolynom von b über K und sei $K(a, b) \subset L$ ein Zerfällungskörper von fg über K . Wir bezeichnen die verschiedenen Nullstellen von f in L mit $a = a_1, a_2, \dots, a_m$ und die verschiedenen Nullstellen von g in L mit $b = b_1, b_2, \dots, b_n$. Die Menge der $\lambda \in K$, für die es ein Paar (i, j) gibt mit $j > 1$ und

$$a + \lambda b = a_i + \lambda b_j,$$

ist endlich (jedes Paar (i, j) schließt höchstens ein λ aus). Da K unendlich ist, gibt es also ein $\lambda \in K$ mit $c := a + \lambda b \neq a_i + \lambda b_j$ für alle (i, j) mit $j > 1$. Wir wollen jetzt $K(c) = K(a, b)$ zeigen. Die Inklusion „ \subset “ ist klar; es bleibt also $a, b \in K(c)$ zu zeigen. Wir zeigen $b \in K(c)$, dann folgt auch $a = c - \lambda b \in K(c)$. Dazu betrachten wir $h = \text{ggT}(g, f(c - \lambda X))$ in $K(c)[X]$. Da b eine gemeinsame Nullstelle von g und $f(c - \lambda X)$ ist, muss $X - b$ ein Teiler von h sein (in $K(a, b)[X]$). Wäre b_j mit $j > 1$ eine Nullstelle von h , dann wäre b_j auch eine Nullstelle von $f(c - \lambda X)$, also wäre $c - \lambda b_j = a_i$ für ein $1 \leq i \leq m$, im Widerspruch zur Wahl von λ . Da h ein Teiler von g sein muss und da g nur einfache Nullstellen hat (denn b ist separabel über K — hier wird diese wichtige Voraussetzung verwendet!), folgt $h = X - b$. Da der ggT aber durch den Euklidischen Algorithmus in $K(c)[X]$ berechnet werden kann, folgt $b \in K(c)$. \square

10.12. Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17}, i)$, den Zerfällungskörper von $X^4 - 17$ über \mathbb{Q} . Mit $\lambda = 1$ sehen wir, dass alle Elemente $i^m \sqrt[4]{17} \pm i$ (mit $0 \leq m \leq 3$) paarweise verschieden sind. Da wir uns in Charakteristik 0 befinden, sind alle Elemente separabel. Es folgt $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17} + i)$. ♣

BSP
primitives
Element

* **10.13. Satz.** Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und seien $a, b_1, \dots, b_n \in K'$ algebraisch über K mit b_1, \dots, b_n separabel über K . Dann gibt es $c \in K(a, b_1, \dots, b_n)$ mit $K(c) = K(a, b_1, \dots, b_n)$.

SATZ
Satz vom
primitiven
Element

Insbesondere ist jede endliche separable Körpererweiterung $K \subset K'$ einfach, hat also ein primitives Element c (d.h., es ist $K' = K(c)$).

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n . Für $n = 0$ gilt die Behauptung trivialerweise mit $c = a$. Sei also $n \geq 1$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $c' \in K(a, b_1, \dots, b_{n-1})$ mit $K(a, b_1, \dots, b_{n-1}) = K(c')$; insbesondere ist c' algebraisch über K . Dann haben wir

$$K(a, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n) = K(a, b_1, \dots, b_{n-1})(b_n) = K(c')(b_n) = K(c', b_n).$$

Nach Lemma 10.11 gibt es $c \in K(c', b_n)$ mit $K(c', b_n) = K(c)$.

Ist $K \subset K'$ endlich und separabel, dann wird K' von endlich vielen separablen Elementen über K erzeugt; damit ist der erste Teil des Satzes anwendbar. □

Wie Algebraizität ist auch Separabilität transitiv:

10.14. Satz. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung.

- (1) Sind $a, b \in K'$, sodass a separabel ist über K und b separabel ist über $K(a)$, dann ist b auch separabel über K .
- (2) Ist $K' \subset L$ eine weitere Körpererweiterung und sind die Erweiterungen $K \subset K'$ und $K' \subset L$ separabel, dann ist auch $K \subset L$ separabel.

SATZ
Transitivität
der
Separabilität

Beweis. Es ist nur im Fall positiver Charakteristik p etwas zu zeigen. Zum Beweis der ersten Aussage benutzen wir Lemma 10.7. Aus den Voraussetzungen folgt dann $K(a^p) = K(a)$ und $K(a)(b^p) = K(a)(b)$; damit ist $K(a^p, b^p) = K(a, b^p) = K(a, b)$. Wie im Beweis von Lemma 10.7 (3) haben wir $[K(a^p, b^p) : K(b^p)] \leq [K(a, b) : K(b)]$, und wie dort folgt $K(b^p) = K(b)$, also ist b separabel über K .

Zum Beweis der zweiten Aussage sei $b \in L$; wir müssen zeigen, dass b separabel über K ist. Sei dazu f das Minimalpolynom von b über K' und K_1 der von den Koeffizienten von f über K erzeugte Zwischenkörper. Da b nach Voraussetzung separabel über K' ist, hat f nur einfache Nullstellen; insbesondere ist b auch separabel über K_1 , da f auch das Minimalpolynom von b über K_1 ist. Außerdem ist K_1 eine von endlich vielen separablen Elementen (den Koeffizienten von f) erzeugte Erweiterung von K ; nach dem Satz vom primitiven Element 10.13 ist also $K_1 = K(a)$ mit einem $a \in K_1 \subset K'$; a ist separabel über K , da die Körpererweiterung $K \subset K'$ separabel ist. Nach Teil (1) folgt, dass auch b separabel über K ist. □

Die Umkehrung „ $K \subset L$ separabel $\implies K \subset K'$ separabel und $K' \subset L$ separabel“ gilt auch, wie man sich sehr leicht überlegt.

11. AUTOMORPHISMEN VON KÖRPERERWEITERUNGEN

Wir betrachten jetzt Automorphismen von Körpererweiterungen genauer.

* **11.1. Definition.** Seien $K \subset K_1$ und $K \subset K_2$ zwei Körpererweiterungen. Ein *Homomorphismus* $K_1 \rightarrow K_2$ von Körpererweiterungen von K oder *Homomorphismus über K* ist ein Körperhomomorphismus $\phi: K_1 \rightarrow K_2$ mit $\phi|_K = \text{id}_K$. ϕ ist ein *Isomorphismus* von Körpererweiterungen, wenn ϕ bijektiv ist. Im Fall $K_1 = K_2$ heißt ϕ dann ein *Automorphismus* der Körpererweiterung $K \subset K_1$. Diese Automorphismen bilden eine Gruppe, die *Automorphismengruppe* $\text{Aut}(K_1/K)$ von $K \subset K_1$. \diamond

DEF
Automorphismus einer Körpererweiterung

Es ist klar, dass $\text{Aut}(K_1/K)$ in natürlicher Weise auf K_1 operiert.

Ein Homomorphismus ϕ über K ist K -linear bezüglich der natürlichen K -Vektorraumstruktur der Erweiterungskörper (denn $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, weil ϕ ein Ringhomomorphismus ist, und für $\lambda \in K$ ist auch $\phi(\lambda x) = \phi(\lambda)\phi(x) = \lambda\phi(x)$ wegen $\phi|_K = \text{id}_K$). Wir erinnern uns auch daran, dass jeder Körperhomomorphismus injektiv ist.

11.2. Lemma. *Ist $K \subset K'$ eine endliche Körpererweiterung und $\phi: K' \rightarrow K'$ ein Homomorphismus über K , dann ist $\phi \in \text{Aut}(K'/K)$.*

LEMMA
Automorphismen von endlichen KE

Beweis. Als Homomorphismus von Körpern ist ϕ injektiv. Außerdem ist ϕ K -linear. Als injektiver Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist ϕ dann auch bijektiv. \square

Im Fall von endlichen *separablen* Körpererweiterungen können wir eine recht genaue Aussage über die mögliche Anzahl von Homomorphismen machen.

11.3. Satz. *Sei $K \subset K'$ eine endliche separable Körpererweiterung und sei $K \subset L$ eine weitere Körpererweiterung. Dann gibt es höchstens $[K' : K]$ Homomorphismen $K' \rightarrow L$ über K . Außerdem gibt es eine Körpererweiterung $L \subset L'$, sodass es genau $[K' : K]$ solcher Homomorphismen $K' \rightarrow L'$ über K gibt.*

SATZ
Homomorphismen von separablen KE

Beweis. Da $K \subset K'$ separabel ist, gibt es nach dem Satz vom primitiven Element 10.13 ein Element $\alpha \in K'$, sodass $K' = K(\alpha)$ ist. Sei f das Minimalpolynom von α über K und sei $\deg(f) = n$; dann ist $[K' : K] = n$.

Nach Satz 7.2 gibt es dann genau so viele Homomorphismen $K' \rightarrow L$ über K , wie f Nullstellen in L hat. Wegen $\deg(f) = n$ sind das in jedem Fall höchstens $n = [K' : K]$.

Sei $L \subset L'$ eine Körpererweiterung, sodass L' einen Zerfällungskörper von f über K enthält. (Zum Beispiel können wir für L' einen Zerfällungskörper von f über L nehmen.) Da $K \subset K'$ separabel ist, ist α separabel über K ; damit hat f in L' nur einfache Nullstellen. Da f in $L'[x]$ nach Annahme in Linearfaktoren zerfällt, hat f in L' genau n Nullstellen, und es gibt demnach auch $n = [K' : K]$ Homomorphismen $K' \rightarrow L'$ über K . \square

Wir werden uns bald genauer mit Untergruppen von $\text{Aut}(K'/K)$ und Zwischenkörpern der Körpererweiterung $K \subset K'$ befassen. Es gibt eine enge Beziehung zwischen diesen beiden Arten von Objekten:

11.4. Definition. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung.

- (1) Sei $U \leq \text{Aut}(K'/K)$ eine Untergruppe. Dann heißt der Zwischenkörper(!)

$$\mathcal{F}(U) = \{\alpha \in K' \mid \forall \sigma \in U: \sigma(\alpha) = \alpha\}$$

von $K \subset K'$ der *Fixkörper* von U .

- (2) Sei $K \subset L \subset K'$ ein Zwischenkörper. Dann heißt die Untergruppe

$$\mathcal{U}(L) = \{\sigma \in \text{Aut}(K'/K) \mid \forall \alpha \in L: \sigma(\alpha) = \alpha\}$$

von $\text{Aut}(K'/K)$ die *Fixgruppe* von L . ◇

Die Schreibweise für Fixkörper und -gruppen variiert in der Literatur.

Da $\text{Aut}(K) = \text{Aut}(K/P)$ ist, wobei P der Primkörper von K ist, können wir diese Begriffe auch für Untergruppen von $\text{Aut}(K)$ und beliebige Teilkörper von K verwenden. Für später wichtig ist dann das folgende Ergebnis.

DEF
Fixkörper
Fixgruppe



11.5. Lemma. Sei K ein Körper und sei $G \leq \text{Aut}(K)$ eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe von K . Wir setzen $K_0 = \mathcal{F}(G)$.

- (1) Sei $\alpha \in K$ und seien $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ die verschiedenen Elemente der Bahn von α unter G . Dann ist

$$f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_m) \in K_0[x]$$

ein normiertes irreduzibles Polynom mit Koeffizienten in K_0 . Insbesondere ist α algebraisch über K_0 mit Minimalpolynom f .

- (2) $K_0 \subset K$ ist separabel; es gilt $G = \text{Aut}(K/K_0)$ und $[K : K_0] = \#G$.

LEMMA
Fixkörper
einer
Untergruppe
von $\text{Aut}(K)$

Beweis.

- (1) Es ist zunächst zu zeigen, dass f Koeffizienten in K_0 hat. Wir können die Automorphismen von K zu Automorphismen des Polynomrings $K[x]$ fortsetzen, indem wir sie auf die Koeffizienten der Polynome anwenden. Für $\gamma \in G$ gilt dann $\gamma(f) = f$, denn γ permutiert die Elemente der Bahn von α und damit die Faktoren in der Produktdarstellung von f . Das bedeutet, dass alle Koeffizienten Fixpunkte der Operation von G sind; nach Definition des Fixkörpers sind sie also in $K_0 = \mathcal{F}(G)$. Dass f normiert ist, ist klar. Als Nullstelle eines normierten Polynoms in $K_0[x]$ ist α dann algebraisch über K_0 . Es bleibt zu zeigen, dass f irreduzibel ist. Das liegt daran, dass G auf der Bahn von α (wie auf jeder Bahn) transitiv operiert: Haben wir eine Faktorisierung $f = f_1 f_2$ in $K_0[x]$, wobei wir annehmen können, dass $f_1(\alpha) = 0$ ist, dann muss jeder Automorphismus von K über K_0 , also insbesondere jedes Element von G , α auf eine Nullstelle von f_1 abbilden. Also hat f_1 schon alle Elemente der Bahn von α als Nullstellen; damit muss f_2 konstant sein. Da $f \in K_0[x]$ irreduzibel und normiert ist und α als Nullstelle hat, muss f das Minimalpolynom von α über K_0 sein.
- (2) Sei $\alpha \in K$ und f wie in Teil (1) das Minimalpolynom von α über K_0 . Da f offensichtlich nur einfache Nullstellen hat, ist α separabel über K_0 . Da $\alpha \in K$ beliebig war, folgt, dass die Körpererweiterung $K_0 \subset K$ separabel ist. Wir zeigen, dass die Körpererweiterung auch endlich ist: Nach Teil (1) gilt für jedes $\alpha \in K$

$$[K_0(\alpha) : K_0] = \deg(f) = \#(G \cdot \alpha) \leq \#G.$$

Nach dem Satz vom primitiven Element 10.13 ist jeder Zwischenkörper $K_0 \subset L \subset K$, der über K_0 endlich ist, von der Form $L = K_0(\alpha)$, also gilt $[L : K_0] \leq \#G$. Sei jetzt L ein Zwischenkörper mit $[L : K_0]$ endlich und maximal. Gäbe es $\beta \in K \setminus L$, dann wäre $L \subsetneq L(\beta) \subset K$ und β algebraisch über K_0 nach Teil (1). Dann wäre aber $[L : K_0] < [L(\beta) : K_0] < \infty$, im Widerspruch zur Wahl von L . Es folgt $K = L$, also ist $K_0 \subset K$ endlich, und $[K : K_0] \leq \#G$. Auf der anderen Seite ist $G \leq \text{Aut}(K/K_0)$ nach Definition von K_0 , also gilt nach Satz 11.3 $\#G \leq \# \text{Aut}(K/K_0) \leq [K : K_0]$. Damit ist $[K : K_0] = \#G = \# \text{Aut}(K/K_0)$, woraus auch $G = \text{Aut}(K/K_0)$ folgt. \square

11.6. Folgerung. Sei $K \subset K'$ eine endliche separable Körpererweiterung. Dann gilt $\# \text{Aut}(K'/K) \leq [K' : K]$, mit Gleichheit genau dann, wenn jedes normierte irreduzible Polynom $f \in K[x]$, das in K' eine Nullstelle hat, in $K'[x]$ bereits in Linearfaktoren zerfällt.

FOLG
Kriterium für
 $\# \text{Aut}(K'/K)$
 $= [K' : K]$

Beweis. Die Aussage „ $\# \text{Aut}(K'/K) \leq [K' : K]$ “ ist als Spezialfall $L = K'$ in Satz 11.3 enthalten. Hat K' die angegebene Eigenschaft, dann ist $L = K'$ eine mögliche Wahl in Satz 11.3, also folgt Gleichheit. Jetzt nehmen wir umgekehrt an, dass $\# \text{Aut}(K'/K) = [K' : K]$ gilt. Dann ist $K = \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K))$, denn

$$K \subset \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K)) \quad \text{und} \quad [K' : K] = \# \text{Aut}(K'/K) = [K' : \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K))]$$

nach Lemma 11.5 (2). Sei $f \in K[x]$ normiert und irreduzibel und $\beta \in K'$ mit $f(\beta) = 0$. Wir betrachten die Bahn $\{\phi(\beta) \mid \phi \in \text{Aut}(K'/K)\}$ von β unter der Automorphismengruppe von $K \subset K'$; ihre Elemente seien $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Nach Lemma 11.5 ist dann $\tilde{f} = \prod_{j=1}^m (x - \beta_j) \in K[x]$ das Minimalpolynom von β , also ist $f = \tilde{f}$, und f zerfällt in $K'[x]$ in Linearfaktoren. \square

Die Eigenschaft der Körpererweiterung, die die Gleichheit von $\# \text{Aut}(K'/K)$ und $[K' : K]$ garantiert, ist wichtig genug, dass sie einen eigenen Namen hat:

* **11.7. Definition.** Eine Körpererweiterung $K \subset K'$ mit der Eigenschaft, dass jedes normierte irreduzible Polynom $f \in K[x]$, das in K' eine Nullstelle hat, in $K'[x]$ in Linearfaktoren zerfällt, heißt *normal*. \diamond

DEF
normale KE

(Wir werden später sehen, wo diese zunächst einmal wenig erhellende Bezeichnung herkommt.)

11.8. Beispiele.

- (1) Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung vom Grad $[K' : K] = 2$. Dann ist $K \subset K'$ normal. Denn sei $f \in K[x]$ ein normiertes irreduzibles Polynom, das in K' eine Nullstelle α hat. Dann folgt $\deg(f) \leq 2$. Jedes Polynom vom Grad 1 „zerfällt“ trivialerweise in Linearfaktoren. Wir können demnach $\deg(f) = 2$ annehmen, also $f = x^2 + ax + b$ mit $a, b \in K$. Dann ist aber $f = (x - \alpha)(x + a + \alpha)$ in $K'[x]$; damit zerfällt f in $K'[x]$ in Linearfaktoren.
- (2) Eine Körpererweiterung vom Grad 3 braucht dagegen nicht normal zu sein. Zum Beispiel hat $f = x^3 - 2$ in $K' = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ eine Nullstelle, zerfällt aber über K' nicht in Linearfaktoren, da die anderen beiden Nullstellen nicht in K' liegen. Also ist $\mathbb{Q} = K \subset K'$ nicht normal.
- (3) Ist K' algebraisch abgeschlossen, dann ist $K \subset K'$ normal, weil jedes Polynom in $K'[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. \clubsuit

BSP
(nicht)
normale KE

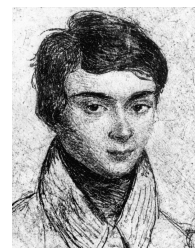
11.9. **Beispiel.** Im Gegensatz zu Algebraizität und Separabilität ist Normalität *nicht* transitiv. Zum Beispiel ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17})$ nicht normal, denn $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17})$ enthält nur zwei der vier Nullstellen von $x^4 - 17$. Auf der anderen Seite sind aber die beiden Körpererweiterungen $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{17})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{17}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17})$ normal, da sie Grad 2 haben.

BSP
Normalität
nicht
transitiv



12. GALOIS-ERWEITERUNGEN

Wir werden uns jetzt mit der sogenannten *Galois-Theorie* befassen. Kurz gesagt, handelt es sich um das Studium der Struktur von Zerfällungskörpern; insbesondere um die Beschreibung der Zwischenkörper zwischen dem Grundkörper K und dem Zerfällungskörper K' eines Polynoms $f \in K[X]$. Eine entscheidende Rolle spielt dabei die Automorphismengruppe der Körpererweiterung $K \subset K'$, die wir im letzten Abschnitt studiert haben.



É. Galois
(1811–1832)

Die Bezeichnung „Galois-Theorie“ verweist auf **Évariste Galois**, der die grundlegenden Zusammenhänge Anfang der 1830er Jahre erkannte und kurz darauf nach einem Duell im Alter von 20 Jahren starb.

* **12.1. Definition.** Eine algebraische Körpererweiterung $K \subset K'$ heißt *galoissch* oder *Galois-Erweiterung*, wenn $K = \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K))$ ist. In diesem Fall heißt $\text{Aut}(K'/K)$ die *Galois-Gruppe* der Körpererweiterung $K \subset K'$; sie wird häufig $\text{Gal}(K'/K)$ geschrieben. ◇

DEF
Galois-
Erweiterung
Galois-Gruppe

Beachte: $K \subset \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K))$ gilt immer nach Definition von $\text{Aut}(K'/K)$. Die Bedingung ist also, dass jedes unter $\text{Aut}(K'/K)$ festgehaltene Element von K' bereits in K liegt.

Man beachte auch die zwei „s“ in „galoissch“!



12.2. Beispiel. Die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{17})$ ist nicht galoissch, denn K hat keine nichttrivialen Automorphismen (jeder Automorphismus muss $\sqrt[3]{17}$ auf eine Nullstelle von $X^3 - 17$ abbilden; in K gibt es aber keine andere Nullstelle); damit ist $\mathcal{F}(\text{Aut}(K/\mathbb{Q})) = K \neq \mathbb{Q}$. ♣

BSP
keine Galois-
Erweiterung

Wir können endliche Galois-Erweiterungen charakterisieren:

* **12.3. Satz.** Sei $K \subset K'$ eine endliche Körpererweiterung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

SATZ
Galois-
Erweiterungen

- (1) $K \subset K'$ ist galoissch.
- (2) $K \subset K'$ ist separabel und normal.
- (3) $\# \text{Aut}(K'/K) = [K' : K]$.
- (4) K' ist Zerfällungskörper eines normierten separablen irreduziblen Polynoms $f \in K[x]$.

Beweis. „(1) \Rightarrow (3)“: Wir wenden Lemma 11.5 an auf $G = \text{Aut}(K'/K)$. Nach Voraussetzung ist $K = \mathcal{F}(G)$, also ist $[K' : K] = \#G$ (und $K \subset K'$ ist separabel).

„(1) \Rightarrow (2)“: Wir haben schon gesehen, dass aus (1) die Separabilität folgt. Außerdem folgt (3); nach Folgerung 11.6 bedeutet die Gleichheit $[K' : K] = \# \text{Aut}(K'/K)$ gerade, dass $K \subset K'$ normal ist.

„(2) \Rightarrow (4)“: Da $K \subset K'$ endlich und separabel ist, gibt es nach dem Satz vom primitiven Element 10.13 ein $\alpha \in K'$ mit $K' = K(\alpha)$. Sei f das Minimalpolynom von α über K . Da $K \subset K'$ normal ist und f die Nullstelle α in K' hat, zerfällt f in $K'[x]$ in Linearfaktoren. Damit ist K' ein Zerfällungskörper von f ; f ist separabel, da α separabel über K ist (denn $K \subset K'$ ist separabel).

„(4) \Rightarrow (3)“: Das folgt aus dem Beweis von Satz 11.3.

„(3) \Rightarrow (1)“: Sei wieder $G = \text{Aut}(K'/K)$; es gelte $[K' : K] = \#G$. Dann haben wir $K \subset \mathcal{F}(G) \subset K'$ und nach Lemma 11.5 gilt $[K' : \mathcal{F}(G)] = \#G = [K' : K]$. Daraus folgt $K = \mathcal{F}(G)$. \square

Da Normalität nicht transitiv in Körpererweiterungen ist, gilt das analog für die Eigenschaft galoissch zu sein (wie dasselbe Beispiel zeigt).

Die Äquivalenz von (1) und (2) gilt auch noch für unendliche algebraische Körpererweiterungen (Satz von Artin, siehe z.B. [KM, Satz 26.7]).



E. Artin
(1898–1962)

12.4. Beispiel. Ist $\text{char}(K) \neq 2$ und ist $K \subset K'$ eine quadratische Körpererweiterung (also mit $[K' : K] = 2$), dann ist $K \subset K'$ galoissch, denn eine quadratische Erweiterung ist stets normal, und sie kann nur dann inseparabel sein, wenn die Charakteristik den Grad teilt. Es gilt dann $\text{Aut}(K'/K) = \{\text{id}_{K'}, \tau\}$ für einen Automorphismus $\tau \neq \text{id}_{K'}$. Wegen $\text{char}(K) \neq 2$ können wir die übliche quadratische Ergänzung durchführen. Das zeigt, dass $K' = K(\sqrt{a})$ ist für ein $a \in K$ (sodass a kein Quadrat in K ist). Das Minimalpolynom von \sqrt{a} ist $x^2 - a$ und hat $-\sqrt{a}$ als einzige weitere Nullstelle, also muss $\tau(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}$ sein.

BSP
quadratische
Erweiterung

Als konkretes Beispiel haben wir $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$; in diesem Fall ist τ die komplexe Konjugation: $\tau(a + bi) = a - bi$. \clubsuit

12.5. Folgerung. Jede Erweiterung $K \subset K'$ von endlichen Körpern ist galoissch mit $\text{Gal}(K'/K) = \langle \phi \rangle \cong \mathbb{Z}/[K' : K]\mathbb{Z}$, wobei $\phi: K' \rightarrow K', x \mapsto x^{\#K}$ ist.

FOLG
Erw.
endlicher
Körper sind
galoissch

Beweis. Sei $q = \#K$ (dann ist $q = p^e$ eine Primzahlpotenz und p ist die Charakteristik von K), dann ist $\phi: K' \rightarrow K', x \mapsto x^q$, ein Automorphismus von K' , der die Elemente von K fest lässt (und nur diese, denn die Fixpunkte sind genau die q Nullstellen von $x^q - x$), also ist $\phi \in \text{Aut}(K'/K)$, und es gilt

$$K \subset \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K)) \subset \mathcal{F}(\langle \phi \rangle) = K.$$

Damit ist $K \subset K'$ jedenfalls galoissch. ϕ hat Ordnung $[K' : K]$ als Element von $\text{Aut}(K'/K)$ (siehe Lemma 8.3); damit folgt, dass $\text{Aut}(K'/K) = \langle \phi \rangle$ ist, denn

$$\#\text{Aut}(K'/K) = [K' : K] = [K' : \mathcal{F}(\langle \phi \rangle)] = \#\langle \phi \rangle.$$

Die Galois-Gruppe $\text{Aut}(K'/K)$ ist also zyklisch und wird von ϕ erzeugt. \square

12.6. Beispiel. Die Automorphismengruppe von \mathbb{R} ist trivial: $\text{Aut}(\mathbb{R}) = \{\text{id}_{\mathbb{R}}\}$. (Das zu zeigen war eine Übungsaufgabe (EZAS, Blatt 5, Aufgabe (4)).)

Als Konsequenz ergibt sich, dass es keine Galois-Erweiterung $K \subset \mathbb{R}$ mit $K \neq \mathbb{R}$ geben kann. \clubsuit

BSP
 \mathbb{R} ist keine
Galois-
Erweiterung

12.7. Folgerung. Ist K' der Zerfällungskörper über K eines (nicht notwendig irreduziblen) normierten separablen Polynoms $f \in K[x]$, dann ist $K \subset K'$ galoissch.

FOLG
Zerfällungs-
körper sind
galoissch

Beweis. Seien f_1, f_2, \dots, f_l die verschiedenen normierten irreduziblen Faktoren von f . Da f separabel ist, sind auch alle f_j separabel. Dann können wir statt f auch $f_0 = f_1 f_2 \cdots f_l$ betrachten; f_0 hat nur einfache Nullstellen in K .

Ist $K \subset L \subset K'$ ein Zwischenkörper, dann schreiben wir $\text{Hom}_K(L, K')$ für die Menge der Homomorphismen $L \rightarrow K'$ über K . Sei $L_0 = K$. Ist L_n definiert und

$L_n \neq K'$, dann gibt es eine Nullstelle α_{n+1} von f_0 in K' mit $\alpha_{n+1} \notin L_n$; wir setzen $L_{n+1} = L_n(\alpha_{n+1})$. Dann bilden die L_n eine strikt aufsteigende Folge von Zwischenkörpern von $K \subset K'$. Da diese Erweiterung als Zerfällungskörper endlich ist, muss es einen Index m geben mit $L_m = K'$. Wir zeigen jetzt durch Induktion, dass $\# \text{Hom}_K(L_n, K') = [L_n : K]$ ist für $n = 0, 1, \dots, m$. Für $m = n$ erhalten wir

$$\# \text{Aut}(K'/K) = \# \text{Hom}_K(K', K') = \# \text{Hom}_K(L_m, K') = [L_m : K] = [K' : K],$$

woraus mit Satz 12.3 folgt, dass $K \subset K'$ galoissch ist.

Es ist $L_0 = K$, also ist $\# \text{Hom}_K(L_0, K') = 1 = [L_0 : K]$. Für den Schritt von n auf $n + 1$ sei h_{n+1} das Minimalpolynom von α_{n+1} über L_n ; dann hat h_{n+1} genau $\deg(h_{n+1}) = [L_{n+1} : L_n]$ verschiedene Nullstellen in K , und dasselbe gilt für h_{n+1}^ϕ für jeden Homomorphismus $\phi \in \text{Hom}_k(L_n, K')$ (dabei bezeichne h^ϕ das Polynom, das man aus h bekommt, indem man ϕ auf die Koeffizienten anwendet), denn h_{n+1} und h_{n+1}^ϕ sind Teiler von f_0 in $K'[x]$ und zerfallen deshalb über K' in Linearfaktoren. Nach Satz 7.2 lässt sich jeder Homomorphismus $\phi \in \text{Hom}_k(L_n, K')$ auf genau $[L_{n+1} : L_n]$ verschiedene Arten zu einem Homomorphismus $L_{n+1} \rightarrow K'$ fortsetzen. Insgesamt erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \# \text{Hom}_k(L_{n+1}, K') &= [L_{n+1} : L_n] \cdot \# \text{Hom}_K(L_n, K') \\ &= [L_{n+1} : L_n] \cdot [L_n : K] = [L_{n+1} : K] \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Das im obigen Beweis verwendete Verfahren lässt sich auch dazu benutzen, die Automorphismen einer Galois-Erweiterung zu bestimmen.

12.8. Beispiel. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17}, i)$; das ist der Zerfällungskörper von $f = X^4 - 17$ über \mathbb{Q} . Wir betrachten den Körperturm

BSP
 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{17}, i)$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17}, i) = K;$$

es ist $\mathbb{Q}(i)$ der Zerfällungskörper von $X^2 + 1$ über \mathbb{Q} und K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}(i)$; außerdem bleibt f irreduzibel über $\mathbb{Q}(i)$, was man z.B. mit dem Eisenstein-Kriterium, angewendet für den Ring $\mathbb{Z}[i]$ und das Primelement $1 + 4i$, sehen kann.

Nach Beispiel 12.4 ist $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(i), K) = \text{Aut}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) = \{\text{id}, \tau'\}$ mit $\tau'(i) = -i$. Wir bestimmen jetzt, wie sich diese Homomorphismen auf K fortsetzen lassen. Die Nullstellen von f in K sind $\alpha = \sqrt[4]{17}, i\alpha, -\alpha$ und $-i\alpha$. Wegen $K = \mathbb{Q}(i)(\alpha)$ ist die Fortsetzung jeweils durch ihren Wert an der Stelle α eindeutig bestimmt, und dieser Wert kann jede der vier Nullstellen sein (weil f irreduzibel über $\mathbb{Q}(i)$ ist). Sei $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ die Fortsetzung von $\text{id}: \mathbb{Q}(i) \hookrightarrow K$ mit $\sigma(\alpha) = i\alpha$, und sei τ die Fortsetzung von τ' mit $\tau(\alpha) = \alpha$. Dann erhalten wir die folgenden Automorphismen:

ρ	$\rho _{\mathbb{Q}(i)}$	$\rho(i)$	$\rho(\alpha)$	$\rho(i\alpha)$	$\rho(-\alpha)$	$\rho(-i\alpha)$
id	id	i	α	$i\alpha$	$-\alpha$	$-i\alpha$
σ	id	i	$i\alpha$	$-\alpha$	$-i\alpha$	α
σ^2	id	i	$-\alpha$	$-i\alpha$	α	$i\alpha$
σ^3	id	i	$-i\alpha$	α	$i\alpha$	$-\alpha$
τ	τ'	$-i$	α	$-i\alpha$	$-\alpha$	$i\alpha$
$\sigma\tau$	τ'	$-i$	$i\alpha$	α	$-i\alpha$	$-\alpha$
$\sigma^2\tau$	τ'	$-i$	$-\alpha$	$i\alpha$	α	$-i\alpha$
$\sigma^3\tau$	τ'	$-i$	$-i\alpha$	$-\alpha$	$i\alpha$	α

An dieser Tabelle liest man ab, dass $\sigma^4 = \tau^2 = \text{id}$ und $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$ ist; es folgt $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong D_4$. Der Isomorphismus kommt dabei konkret von dem natürlichen Homomorphismus $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow S(\{\alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha\}) \cong S_4$. ♣

Wir betrachten jetzt eine Galois-Erweiterung $K \subset K'$ mit einem Zwischenkörper L . Wann sind die beiden Körpererweiterungen $K \subset L$ und $L \subset K'$ ebenfalls galoissch?

12.9. Satz. *Sei $K \subset K'$ eine endliche Galois-Erweiterung und sei $K \subset L \subset K'$ ein Zwischenkörper. Dann ist $L \subset K'$ galoissch. Die Erweiterung $K \subset L$ ist genau dann galoissch, wenn $\gamma(L) = L$ ist für alle $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$. In diesem Fall ist*

$$\Phi: \text{Gal}(K'/K) \longrightarrow \text{Gal}(L/K), \quad \gamma \longmapsto \gamma|_L$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\text{Gal}(K'/L)$. Insbesondere ist $\text{Gal}(K'/L)$ ein Normalteiler von $\text{Gal}(K'/K)$ und $\text{Gal}(L/K)$ ist isomorph zur Faktorgruppe $\text{Gal}(K'/K)/\text{Gal}(K'/L)$.

SATZ
galoissch
für Zwischenkörper

Die letzte Aussage liefert eine Erklärung für die Bezeichnung „normal“ bei Körpererweiterungen.

Beweis. Wir zeigen erst einmal, dass $L \subset K'$ galoissch ist. Nach Satz 12.3 ist K' Zerfällungskörper über K eines normierten (sogar irreduziblen) separablen Polynoms $f \in K[x]$. Dann ist K' auch Zerfällungskörper von f über L . Nach Folgerung 12.7 ist also $L \subset K'$ galoissch.

Da $K \subset K'$ nach Satz 12.3 separabel ist, gilt das auch für $K \subset L$. Wiederum nach Satz 12.3 ist $K \subset L$ also genau dann galoissch, wenn $K \subset L$ normal ist. Wir zeigen, dass das äquivalent ist zu $\forall \gamma \in \text{Gal}(K'/K): \gamma(L) = L$.

Sei jetzt zunächst $K \subset L$ als normal angenommen; sei $a \in L$ und $\gamma \in \text{Gal}(L/K)$. Wir müssen zeigen, dass $\gamma(a) \in L$ ist. Sei dazu $f \in K[x]$ das Minimalpolynom von a , dann sind alle Nullstellen von f in K' bereits in L (denn $K \subset L$ ist normal). Auf der anderen Seite muss $\gamma(a)$ aber eine Nullstelle von f sein, also ist $\gamma(a) \in L$.

Jetzt nehmen wir an, dass $\gamma(L) = L$ ist für alle $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$. Wir wollen zeigen, dass dann $K \subset L$ normal ist. Sei also $f \in K[x]$ irreduzibel und normiert und $a \in L$ eine Nullstelle von f . Da $K \subset K'$ normal ist, zerfällt f in $K'[x]$ in Linearfaktoren. Aus Lemma 11.5 folgt, dass $\text{Gal}(K'/K)$ auf den Nullstellen von f in K' transitiv operiert. Da $\gamma(L) = L$ ist für alle $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ und eine Nullstelle (nämlich a) in L ist, sind alle Nullstellen in L , also zerfällt f auch schon in $L[x]$ in Linearfaktoren. Wir sehen also, dass jedes irreduzible normierte Polynom $f \in K[x]$, das in L eine Nullstelle hat, in $L[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Damit ist $K \subset L$ normal.

Sei jetzt $K \subset L$ galoissch. Für $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ folgt aus $\gamma(L) = L$, dass die Einschränkung $\gamma|_L \in \text{Gal}(L/K)$ ist; die Abbildung Φ ist also wohldefiniert, und es ist klar, dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Definition von $\text{Aut}(K'/L)$ liefert $\ker(\Phi) = \text{Aut}(K'/L) = \text{Gal}(K'/L)$, also ist $\text{Gal}(K'/L)$ ein Normalteiler von $\text{Gal}(K'/K)$. Es bleibt die Surjektivität von Φ zu zeigen. Nach dem Homomorphiesatz für Gruppen ist das Bild von Φ isomorph zu $\text{Gal}(K'/K)/\text{Gal}(K'/L)$. Es gilt daher

$$\begin{aligned} [L : K] &= \# \text{Gal}(L/K) \geq \# \text{im}(\Phi) = \# \frac{\text{Gal}(K'/K)}{\text{Gal}(K'/L)} \\ &= \frac{\# \text{Gal}(K'/K)}{\# \text{Gal}(K'/L)} = \frac{[K' : K]}{[K' : L]} = [L : K], \end{aligned}$$

also folgt Gleichheit. Damit ist Φ surjektiv; die letzte Behauptung folgt dann auch. \square

12.10. Definition. Ist $K \subset K'$ eine endliche separable Körpererweiterung, dann ist $K' = K(\alpha)$ eine einfache Körpererweiterung nach dem Satz vom primitiven Element 10.13. Sei $f \in K[x]$ das Minimalpolynom von α über K . Sei L ein Zerfällungskörper von f über K' . Dann ist L auch Zerfällungskörper von f über K , also ist $K \subset L$ eine Galois-Erweiterung. Auf der anderen Seite muss jede Galois-Erweiterung von K , die K' enthält, einen Zerfällungskörper von f enthalten. Damit ist L (bis auf Isomorphie) die kleinste K' enthaltende Galois-Erweiterung von K . Die Erweiterung $K \subset L$ heißt der *Galois-Abschluss* oder die *galoissche Hülle* von $K \subset K'$. \diamond

DEF
Galois-
Abschluss

Wir kommen jetzt zu einem wichtigen Aspekt der Galois-Theorie, nämlich zur Beschreibung aller Zwischenkörper durch die Untergruppen der Galois-Gruppe. Sei $K \subset K'$ galoissch. Wir erinnern uns an die Abbildungen aus Definition 11.4:

$$\mathcal{F}: \{U \subset \text{Aut}(K'/K) \mid U \text{ Untergruppe}\} \longrightarrow \{L \mid L \text{ Zwischenkörper von } K \subset K'\}$$

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U) = \{a \in K' \mid \forall \gamma \in U: \gamma(a) = a\}$$

und

$$\mathcal{U}: \{L \mid L \text{ Zwischenkörper von } K \subset K'\} \longrightarrow \{U \subset \text{Aut}(K'/K) \mid U \text{ Untergruppe}\}$$

$$L \longmapsto \mathcal{U}(L) = \text{Aut}(K'/L).$$

Die wesentliche Aussage des nun folgenden Satzes ist, dass diese beiden Abbildungen zueinander invers sind.

* **12.11. Satz.** Sei $K \subset K'$ eine endliche Galois-Erweiterung.

SATZ
Galois-
Korrespondenz

- (1) Die oben definierten Abbildungen \mathcal{F} und \mathcal{U} sind inklusionsumkehrend und zueinander invers.
- (2) Ist L ein Zwischenkörper von $K \subset K'$ und ist $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$, dann ist $\mathcal{U}(\gamma(L)) = \gamma\mathcal{U}(L)\gamma^{-1}$.
- (3) Für einen Zwischenkörper L von $K \subset K'$ gilt, dass $K \subset L$ genau dann galoissch ist, wenn $\mathcal{U}(L)$ ein Normalteiler in $\text{Gal}(K'/K)$ ist.

Inklusionsumkehrend heißt dabei, dass aus $U_1 \subset U_2$ die umgekehrte Inklusion $\mathcal{F}(U_1) \supset \mathcal{F}(U_2)$ folgt; entsprechend für \mathcal{U} .

Beweis.

- (1) Dass \mathcal{F} und \mathcal{U} inklusionsumkehrend sind, folgt direkt aus den Definitionen. Wir zeigen, dass die Abbildungen zueinander invers sind. Für Untergruppen U und Zwischenkörper L gilt

$$U \subset \mathcal{U}(\mathcal{F}(U)) \quad \text{und} \quad L \subset \mathcal{F}(\mathcal{U}(L))$$

(denn jedes Element von U lässt $\mathcal{F}(U)$ elementweise fest und jedes Element von L wird von allen Elementen von $\mathcal{U}(L)$ fest gelassen). Nach Satz 12.9 ist $L \subset K'$ für jedes L galoissch, also ist nach Satz 12.3 $\#\mathcal{U}(L) = [K' : L]$. Nach Lemma 11.5 gilt $[K' : \mathcal{F}(U)] = \#U$. Beides zusammen bedeutet

$$\#U = \#\mathcal{U}(\mathcal{F}(U)) \quad \text{und} \quad [K' : L] = [K' : \mathcal{F}(\mathcal{U}(L))].$$

Zusammen mit der bereits bewiesenen Inklusion folgt

$$U = \mathcal{U}(\mathcal{F}(U)) \quad \text{und} \quad L = \mathcal{F}(\mathcal{U}(L)),$$

was zu zeigen war.

(2) Es gilt

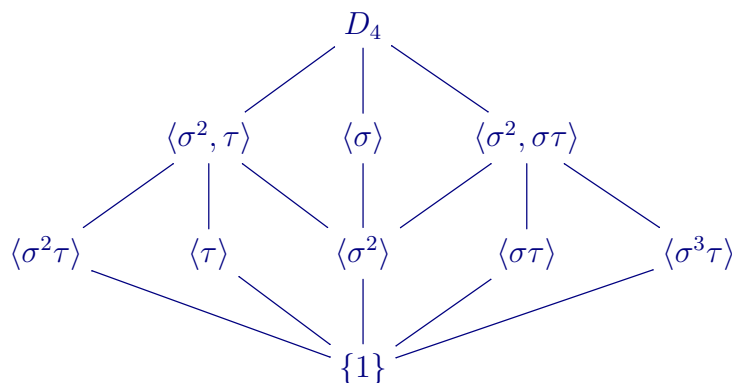
$$\begin{aligned} \phi \in \mathcal{U}(L) = \text{Aut}(K'/L) &\iff \forall a \in L: \phi(a) = a \\ &\iff \forall a \in L: \gamma(\phi(a)) = \gamma(a) \\ &\iff \forall a \in L: (\gamma\phi\gamma^{-1})(\gamma(a)) = \gamma(a) \\ &\iff \forall b \in \gamma(L): (\gamma\phi\gamma^{-1})(b) = b \\ &\iff \gamma\phi\gamma^{-1} \in \text{Aut}(K'/\gamma(L)) = \mathcal{U}(\gamma(L)). \end{aligned}$$

Das bedeutet $\mathcal{U}(\gamma(L)) = \gamma\mathcal{U}(L)\gamma^{-1}$ wie gewünscht.

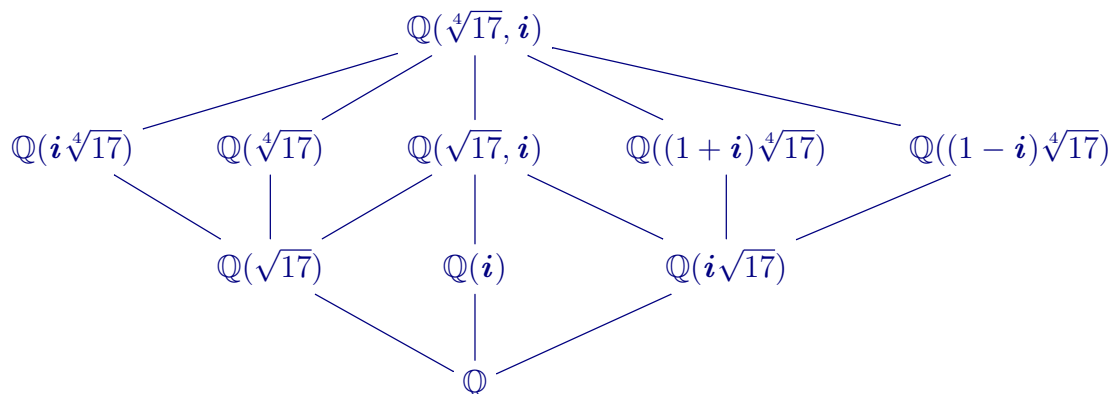
(3) In Satz 12.9 hatten wir schon gesehen, dass aus „ $K \subset L$ galoissch“ folgt, dass $\mathcal{U}(L) = \text{Aut}(K'/L)$ ein Normalteiler von $\text{Gal}(K'/K)$ ist. Für die umgekehrte Implikation beachten wir, dass nach Teil (2) und weil $\mathcal{U}(L)$ ein Normalteiler ist, für alle $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ gilt $\mathcal{U}(\gamma(L)) = \gamma\mathcal{U}(L)\gamma^{-1} = \mathcal{U}(L)$. Nach Teil (1) folgt $L = \gamma(L)$, was nach Satz 12.9 bedeutet, dass $K \subset L$ galoissch ist. □

Da es relativ einfach ist, sich einen Überblick über die Untergruppen einer endlichen Gruppe zu verschaffen, erlaubt es uns dieser Satz, auch alle Zwischenkörper einer endlichen Galois-Erweiterung zu beschreiben.

12.12. Beispiel. Für die Galois-Erweiterung $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{17}, i)$ hatten wir in **Beispiel 12.8** gezeigt, dass $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \langle \sigma, \tau \rangle \cong D_4$ ist. Die Untergruppen der Diedergruppe D_4 sind wie folgt: **BSP** $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{17}, i)$



Aus diesem „Untergruppenverband“ erhalten wir durch Spiegelung an einer horizontalen Achse den „Zwischenkörperverband“ von $\mathbb{Q} \subset K$:



(Um zu sehen, dass die Zwischenkörper wie angegeben sind, prüft man nach, dass die Erzeuger von der jeweiligen Untergruppe fest gelassen werden und dass der Körper den richtigen Grad hat.) Satz 12.11 sagt uns, dass es keine weiteren Zwischenkörper gibt.

Die nichttrivialen Normalteiler von $D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$ sind die Untergruppen $\langle \sigma \rangle$, $\langle \sigma^2, \tau \rangle$ und $\langle \sigma^2, \sigma\tau \rangle$ vom Index 2 und das Zentrum $\langle \sigma^2 \rangle$. Die einzigen (nichttrivialen) Zwischenkörper, die über \mathbb{Q} galoissch sind, sind also $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{17})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{17}, i)$. ♣

13. KREISTEILUNGSKÖRPER UND KREISTEILUNGSPOLYNOME

In diesem Abschnitt studieren wir eine Klasse von Körpererweiterungen (insbesondere von \mathbb{Q}), deren Galois-Gruppen wir explizit bestimmen können.

13.1. Definition. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\text{char}(K) \nmid n$. Dann ist $X^n - 1 \in K[X]$ separabel. Der Zerfällungskörper K_n von $X^n - 1$ über K heißt der n -te Kreisteilungskörper über K . DEF Kreisteilungskörper \diamond

Man adjungiert also gerade die n -ten Einheitswurzeln zu K . Der Name „Kreisteilungskörper“ kommt daher, dass die n -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C} gerade die Ecken eines regelmäßigen, dem Einheitskreis einbeschriebenen, n -Ecks sind; sie teilen also den Einheitskreis in n gleiche Teile. (Siehe auch Beispiel 7.6.)

$X^n - 1$ ist separabel, weil die Ableitung nX^{n-1} nur bei null verschwindet (denn $n \neq 0$ in K), was aber keine Nullstelle von $X^n - 1$ ist. Also hat $X^n - 1$ nur einfache Nullstellen.

Die Nullstellen von $X^n - 1$ bilden die Untergruppe der n -ten Einheitswurzeln in K_n^\times . Sie hat Ordnung n (denn $X^n - 1$ hat n verschiedene Nullstellen in K_n) und ist nach Satz 4.11 zyklisch. Die Erzeuger, das sind also genau die Elemente der Ordnung n in K_n^\times , heißen *primitive n -te Einheitswurzeln*. Ein Element $\zeta \in K_n^\times$ ist genau dann eine primitive n -te Einheitswurzel, wenn $\zeta^n = 1$, aber $\zeta^m \neq 1$ für $1 \leq m < n$ ist. Alle primitiven n -ten Einheitswurzeln sind dann gegeben durch ζ^m mit $0 \leq m < n$ und $m \perp n$; es gibt also genau $\varphi(n)$ davon. DEF primitive n -te Einheitswurzel

13.2. Satz. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \nmid n$; sei weiter K_n der n -te Kreisteilungskörper über K . Dann ist $K \subset K_n$ eine Galois-Erweiterung. Sei $\zeta \in K_n$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Dann ist $K_n = K(\zeta)$ und SATZ Kreisteilungskörper

$$\Phi: \text{Gal}(K_n/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \quad \gamma \longmapsto \log_\zeta \gamma(\zeta)$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei dabei

$$\log_\zeta \zeta^m = m + n\mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist $[K_n : K]$ ein Teiler von $\varphi(n)$ und die Galoisgruppe $\text{Gal}(K_n/K)$ ist abelsch.

Beweis. Als Zerfällungskörper des separablen Polynoms $X^n - 1$ ist K_n eine Galois-Erweiterung von K . Alle Nullstellen von $X^n - 1$ sind Potenzen von ζ ; daraus folgt $K_n = K(\zeta)$. Sei $\gamma \in \text{Gal}(K_n/K)$. Dann ist $\gamma(\zeta)$ wieder eine primitive n -te Einheitswurzel (denn $\text{ord}(\gamma(\zeta)) = \text{ord}(\zeta)$ als Elemente von K_n^\times), also ist $\gamma(\zeta) = \zeta^m$ mit $m \perp n$. Damit ist $\log_\zeta \gamma(\zeta) = m + n\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, und Φ ist als Abbildung wohldefiniert. Ist γ' ein weiteres Element von $\text{Gal}(K_n/K)$, dann gilt $\gamma'(\zeta) = \zeta^{m'}$ für geeignetes m' , und es folgt $(\gamma' \circ \gamma)(\zeta) = \gamma'(\zeta^m) = \gamma'(\zeta)^m = \zeta^{m'm}$, also gilt $\Phi(\gamma' \circ \gamma) = \Phi(\gamma')\Phi(\gamma)$. Damit ist Φ ein Gruppenhomomorphismus. Φ ist injektiv, denn $\ker(\Phi) = \{\text{id}_{K_n}\}$: Gilt $\Phi(\gamma) = 1$, dann wird ζ von γ fest gelassen; wegen $K_n = K(\zeta)$ muss dann $\gamma = \text{id}_{K_n}$ sein.

Es folgt, dass $\text{Gal}(K_n/K)$ zu einer Untergruppe von $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ isomorph und damit abelsch ist. Nach dem Satz von Lagrange haben wir dann auch

$$[K_n : K] = \# \text{Gal}(K_n/K) \mid \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \varphi(n). \quad \square$$

Es stellt sich jetzt die Frage, ob Φ surjektiv sein kann, d.h., ob $[K_n : K] = \varphi(n)$ möglich ist. Wir werden zeigen, dass das für $K = \mathbb{Q}$ der Fall ist.

Zuerst definieren wir ein Polynom Φ_n kleineren Grades als n , sodass K_n auch Zerfällungskörper von Φ_n ist.

13.3. Definition. Das Polynom

$$\Phi_n = \prod_{\substack{\zeta \in \mathbb{C} \\ \text{pr. } n\text{-te EW}}} (X - \zeta) = \prod_{0 \leq m < n, m \perp n} (X - e^{2\pi i m/n}) \in \mathbb{C}[X]$$

DEF
Kreisteilungs-
polynom

heißt das n -te Kreisteilungspolynom. ◇

13.4. Lemma. Das Kreisteilungspolynom hat folgende Eigenschaften:

LEMMA
Eigensch.
Kreisteilungs-
polynom

- (1) $\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$ (d durchläuft die positiven Teiler von n).
- (2) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$, und Φ_n ist normiert.

Beweis.

- (1) Jede n -te Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ ist eine primitive d -te Einheitswurzel für genau einen Teiler d von n (nämlich $d = \#\langle \zeta \rangle = \text{ord}(\zeta)$). Die Nullstellen von $X^n - 1$ sind also gerade die Nullstellen aller Polynome Φ_d mit $d | n$ zusammen. Daraus, und weil alle vorkommenden Polynome normiert sind, folgt die Produktformel.
- (2) Dass Φ_n normiert ist, ist klar. Wir zeigen $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ durch Induktion. Für $n = 1$ ist $\Phi_1 = X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Sei also $n > 1$. Nach Teil (1) gilt dann

$$\Phi_n = \frac{X^n - 1}{\prod_{d|n, d < n} \Phi_d};$$

nach Induktionsvoraussetzung ist der Nenner ein normiertes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Polynomdivision zeigt, dass der Quotient auch ganzzahlige Koeffizienten hat. □

13.5. Beispiele. Die ersten paar Kreisteilungspolynome ergeben sich wie folgt:

BSP
Kreisteilungs-
polynome

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= X - 1 \\ \Phi_2 &= X + 1 \\ \Phi_3 &= X^2 + X + 1 \\ \Phi_4 &= X^2 + 1 \\ \Phi_5 &= X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \\ \Phi_6 &= X^2 - X + 1 \end{aligned}$$

Allgemein gilt für Primzahlen p :

$$\Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1$$

und für Zweierpotenzen 2^m mit $m \geq 1$:

$$\Phi_{2^m} = X^{2^{m-1}} + 1.$$

Diese Beispiele lassen vermuten, dass die Koeffizienten von Φ_n immer nur -1 , 0 oder 1 sind. Das ist aber falsch: Die Koeffizienten werden sogar beliebig groß. Das kleinste n , für das ein Koeffizient vom Betrag > 1 auftritt, ist $n = 105$. ♣

Weil Φ_n Koeffizienten in \mathbb{Z} hat, können wir für jeden Körper (oder sogar Ring) K das Kreisteilungspolynom $\Phi_{n,K} \in K[X]$ definieren, indem wir den kanonischen Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow K$ auf die Koeffizienten von Φ_n anwenden.

13.6. Lemma. *Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\text{char}(K) \nmid n$. Sei weiter $\Phi_{n,K} \in K[X]$ das n -te Kreisteilungspolynom über K . Dann ist der n -te Kreisteilungskörper K_n über K der Zerfällungskörper von $\Phi_{n,K}$, und $[K_n : K] = \varphi(n)$ gilt genau dann, wenn $\Phi_{n,K}$ irreduzibel ist.*

LEMMA

Beweis. Sei ζ eine Nullstelle von $\Phi_{n,K}$. Dann ist ζ eine primitive n -te Einheitswurzel, also gilt $K_n = K(\zeta)$, und $K(\zeta)$ ist der Zerfällungskörper von $\Phi_{n,K}$. Das Minimalpolynom f von ζ über K ist ein Teiler von $\Phi_{n,K}$; es gilt

$$[K_n : K] = \deg(f) \leq \deg(\Phi_{n,K}) = \varphi(n)$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $f = \Phi_{n,K}$ ist, also wenn $\Phi_{n,K}$ irreduzibel ist. □

Es bleibt zu zeigen, dass Φ_n über \mathbb{Q} irreduzibel ist. Der entscheidende Beweisschritt wird im folgenden Lemma getan.

13.7. Lemma. *Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitswurzel und sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von ζ . Sei weiter p eine Primzahl mit $p \nmid n$. Dann ist $f(\zeta^p) = 0$.*

LEMMA

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Da ζ^p eine Nullstelle von Φ_n ist, können wir $\Phi_n = fg$ schreiben mit $g \in \mathbb{Q}[X]$ normiert, sodass $g(\zeta^p) = 0$ ist. Da ζ eine Nullstelle von $g(X^p)$ ist, gilt $f \mid g(X^p)$. Aus dem Lemma von Gauß folgt, dass f und g ganzzahlige Koeffizienten haben. Wir können also die Gleichung $\Phi_n = fg$ modulo p betrachten: $\Phi_{n,\mathbb{F}_p} = \bar{f}\bar{g}$ in $\mathbb{F}_p[X]$, und \bar{f} teilt $\bar{g}(X^p) = \bar{g}^p$ (hier verwenden wir $a^p = a$ für $a \in \mathbb{F}_p$ und $(x+y)^p = x^p + y^p$ in Charakteristik p). Auf der anderen Seite sind \bar{f} und \bar{g} teilerfremd, da $X^n - 1$ wegen $p \nmid n$ auch über \mathbb{F}_p nur einfache Nullstellen hat. Das ist der gewünschte Widerspruch. □

*** 13.8. Satz.** *Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann ist $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Für den n -ten Kreisteilungskörper K_n über \mathbb{Q} gilt $[K_n : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ und $\text{Gal}(K_n/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.*

SATZ
Kreisteilungs-
polynom
irreduzibel

Beweis. Sei f ein irreduzibler Faktor von Φ_n . Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f ; dann ist ζ eine primitive n -te Einheitswurzel mit Minimalpolynom f . Nach Lemma 13.7 ist dann für jede Primzahl $p \nmid n$ auch ζ^p eine Nullstelle von f . Durch nochmalige Anwendung des Lemmas sieht man, dass dann auch ζ^{pq} für beliebige Primzahlen $p, q \nmid n$ eine Nullstelle von f ist; das kann dann auf beliebige Produkte von n nicht teilenden Primzahlen ausgedehnt werden. Da jede primitive n -te Einheitswurzel die Form ζ^m hat mit $0 \leq m < n$ und $m \perp n$ und da jedes solche m als Produkt von Primzahlen $p \nmid n$ geschrieben werden kann, sind alle primitiven n -ten Einheitswurzeln Nullstellen von f . Dann muss aber $f = \Phi_n$ sein; insbesondere ist Φ_n selbst irreduzibel.

Die restlichen Aussagen folgen aus Satz 13.2 und Lemma 13.6. □

Als Anwendung wollen wir die Zahlen $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ charakterisieren, für die das reguläre n -Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Diese Charakterisierung wird durch den folgenden Satz von **Gauß** gegeben:

* **13.9. Satz.** *Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Das reguläre n -Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $\varphi(n) = 2^m$ ist für ein $m \geq 0$. Das bedeutet konkret, dass n die Form $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_l$ hat mit $k \geq 0$ und paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen p_1, p_2, \dots, p_l .*

SATZ
Konstruierbarkeit des regulären n -Ecks

Zur Erinnerung: Eine Fermatsche Primzahl ist eine Primzahl der Form $2^m + 1$. Dabei muss m selbst eine Potenz von 2 sein. Die folgenden Fermatschen Primzahlen sind bekannt:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3, \quad F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5, \quad F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17, \\ F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257, \quad F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537.$$

Wir hatten bereits in Folgerung 9.7 gesehen, dass die Konstruierbarkeit des regulären p -Ecks für eine Primzahl p impliziert, dass p eine Fermatsche Primzahl sein muss. Satz 13.9 ist im Wesentlichen die Umkehrung dieser Aussage.

Beweis. Die Konstruierbarkeit des regulären n -Ecks ist äquivalent zur Konstruierbarkeit von $\cos \frac{2\pi}{n}$. Sei $\zeta_n = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$; ζ_n ist eine primitive n -te Einheitswurzel. Es ist

$$(X - \zeta_n)(X - \zeta_n^{-1}) = X^2 - 2(\cos \frac{2\pi}{n})X + 1 \in \mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})[X],$$

also ist $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ eine höchstens quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n})$. Es gilt also

$$\exists m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}: [\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = 2^{m'} \iff \exists m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}: [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^m$$

(mit $m = m'$ oder $m = m' + 1$). Nach Satz 9.9 ist $\cos \frac{2\pi}{n}$ genau dann konstruierbar, wenn $\cos \frac{2\pi}{n}$ in einem Körper liegt, der aus \mathbb{Q} durch sukzessive quadratische Erweiterungen erhalten werden kann. Notwendig dafür ist, dass $[\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2 ist. Nach der obigen Überlegung ist also $\varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^m$ für geeignetes $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine notwendige Bedingung für die Konstruierbarkeit des regulären n -Ecks. Es bleibt zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist. Sei also $\varphi(n) = 2^m$. Die Gruppe $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ist abelsch von der Ordnung 2^m . Man findet dann (etwa mit Hilfe des Klassifikationssatzes für endliche abelsche Gruppen) leicht eine Folge

$$\{\text{id}\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_m = \Gamma$$

von Untergruppen mit $(G_k : G_{k-1}) = 2$ für alle $k = 1, 2, \dots, m$. Nach dem Satz 12.11 über die Galois-Korrespondenz gehört dazu eine Kette von Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} = L_m \subset L_{m-1} \subset \dots \subset L_1 \subset L_0 = \mathbb{Q}(\zeta_n) \ni \cos \frac{2\pi}{n}$$

(mit $L_k = \mathcal{F}(G_k)$), sodass $[L_{k-1} : L_k] = 2$ ist. Das zeigt, dass $\cos \frac{2\pi}{n}$ konstruierbar ist.

Die Charakterisierung der n mit $\varphi(n) = 2^m$ ergibt sich so: Sei $n = 2^r p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_l^{e_l}$ die Primfaktorzerlegung von n (mit $r \geq 0$, paarweise verschiedenen ungeraden Primzahlen p_j und $e_j \geq 1$). Dann ist

$$\varphi(n) = \varphi(2^r) \varphi(p_1^{e_1}) \varphi(p_2^{e_2}) \cdots \varphi(p_l^{e_l}) \\ = 2^{\max\{0, r-1\}} p_1^{e_1-1} (p_1 - 1) p_2^{e_2-1} (p_2 - 1) \cdots p_l^{e_l-1} (p_l - 1).$$

Das ist genau dann eine Zweierpotenz, wenn das auf jeden Faktor zutrifft. Das bedeutet gerade $e_j = 1$ für alle j und $p_j = 2^{m_j} + 1$, also dass die p_j Fermatsche Primzahlen sind. \square

14. DIE DISKRIMINANTE

Wir dehnen den Begriff der Galois-Gruppe auf Polynome aus:

* **14.1. Definition.** Seien K ein Körper und $f \in K[X]$ ein separables Polynom. Sei weiter K' ein Zerfällungskörper von f über K ; dann ist $K \subset K'$ eine Galois-Erweiterung. Die Galois-Gruppe $\text{Gal}(K'/K)$ heißt die *Galois-Gruppe von f über K* und wird auch $\text{Gal}(f/K)$ geschrieben. \diamond

DEF
Galois-Gruppe
eines
Polynoms

Wir halten zunächst einmal folgende Beobachtung fest:

14.2. Lemma. *In der Situation von Definition 14.1 sei $N_f \subset K'$ die Menge der Nullstellen von f . Dann definiert*

$$\text{Gal}(f/K) \longrightarrow S(N_f), \quad \sigma \longmapsto \sigma|_{N_f}$$

einen injektiven Gruppenhomomorphismus. Ist $\#N_f = n$, dann können wir $S(N_f)$ durch Nummerierung der Nullstellen mit S_n identifizieren; damit ist $\text{Gal}(f/K)$ isomorph zu einer Untergruppe der S_n , und diese Untergruppe ist bis auf Konjugation eindeutig bestimmt.

Ist f irreduzibel, dann operiert diese Untergruppe transitiv auf N_f bzw. $\{1, 2, \dots, n\}$ und ihre Ordnung ist durch n teilbar.

LEMMA
Galois-Gruppe
als Untergr.
von S_n

Beweis. Da K' ein Zerfällungskörper von f ist, gilt $K' = K(N_f)$. Es folgt, dass jeder Automorphismus $\sigma \in \text{Aut}(K'/K) = \text{Gal}(f/K)$ durch $\sigma|_{N_f}$ eindeutig bestimmt ist. Außerdem muss jeder Automorphismus von $K \subset K'$ jede Nullstelle von f wieder auf eine Nullstelle von f abbilden; damit ist $\sigma|_{N_f} \in S(N_f)$. Beides zusammen zeigt, dass die Abbildung wohldefiniert und injektiv ist; dass sie ein Gruppenhomomorphismus ist, ist klar. Eine Bijektion $\nu: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow N_f$ (also eine Nummerierung der Nullstellen) induziert einen Isomorphismus $S(N_f) \rightarrow S_n$, $\sigma \mapsto \nu^{-1} \circ \sigma \circ \nu$; durch Nachschalten dieses Isomorphismus erhalten wir eine Einbettung $\text{Gal}(f/K) \rightarrow S_n$. Eine Änderung der Nummerierung bewirkt das Nachschalten eines inneren Automorphismus von S_n . Es folgt, dass die Bilder von $\text{Gal}(f/K)$ unter allen diesen Isomorphismen gerade eine Konjugationsklasse von Untergruppen der S_n durchlaufen.

Dass $\text{Gal}(K'/K)$ auf den Nullstellen in K' jedes über K irreduziblen Polynoms transitiv operiert, folgt aus Lemma 11.5. Für die letzte Aussage sei $\alpha \in K'$ eine Nullstelle von f . Dann ist $K \subset K(\alpha) \subset K'$ und $[K(\alpha) : K] = \deg(f) = n$; die Teilbarkeit folgt dann aus dem Gradsatz und aus $\#\text{Gal}(f/K) = [K' : K]$. \square

Unser Ziel in diesem Abschnitt wird sein, ein Kriterium zu entwickeln, mit dessen Hilfe wir entscheiden können, ob die Galois-Gruppe $\text{Gal}(f/K)$ (bzw. ihr Bild in der S_n) in der A_n enthalten ist. Als motivierendes Beispiel betrachten wir den Fall $\deg(f) = 2$. Sei also $f = x^2 + px + q \in K[x]$. Im Fall $\text{char}(K) \neq 2$ haben wir die wohlbekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x^2 + px + q = 0 \implies x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Hat f keine mehrfache Nullstelle, dann ist $p^2 - 4q \neq 0$, und aus obiger Formel folgt

$$\begin{aligned} p^2 - 4q \text{ ist ein Quadrat in } K &\iff f \text{ zerfällt über } K \text{ in Linearfaktoren} \\ &\iff \text{Gal}(f/K) = A_2 = \{\text{id}\}. \end{aligned}$$

Im anderen Fall ist $\text{Gal}(f/K) = S_2$. Der Ausdruck $p^2 - 4q$ ist als die *Diskriminante* von f bekannt.

Wir wollen das jetzt auf Polynome höheren Grades verallgemeinern. Dazu betrachten wir zunächst ein (separables) Polynom vom Grad 3:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Wir nehmen an, dass das Polynom irreduzibel ist, denn sonst könnten wir es faktorisieren, und dann hätten wir es mit Polynomen kleineren Grades zu tun. Wir nummerieren die Nullstellen von f in einem Zerfällungskörper als $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und identifizieren so $\text{Gal}(f/K)$ mit einer Untergruppe der S_3 . Aus Lemma 14.2 folgt dann, dass

$$\text{Gal}(f/K) = S_3 \quad \text{oder} \quad \text{Gal}(f/K) = A_3$$

ist. Wie können wir entscheiden, welche der beiden Möglichkeiten zutrifft?

Im Fall $\text{Gal}(f/K) = S_3$ muss es einen Zwischenkörper $K \subset L \subset K'$ geben, der quadratisch über K ist, nämlich $L = \mathcal{F}(A_3)$. Wenn $\text{char}(K) \neq 2$ ist, dann ist $L = K(\sqrt{d})$ für ein $d \in K$, das kein Quadrat in K ist. Da A_3 ein Normalteiler von S_3 ist, ist $K \subset L$ galoissch (das ist auch so klar, da jede quadratische Körpererweiterung in Charakteristik $\neq 2$ galoissch ist) mit Galois-Gruppe S_3/A_3 . Das heißt konkret, dass für $\sigma \in S_3 = \text{Gal}(f/K)$ gilt

$$\sigma \in A_3 \Rightarrow \sigma(\sqrt{d}) = \sqrt{d} \quad \text{und} \quad \sigma \in S_3 \setminus A_3 \Rightarrow \sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}.$$

(Im zweiten Fall wird \sqrt{d} nicht fixiert, muss also auf die andere Nullstelle von $x^2 - d$ abgebildet werden.) Man kann das als

$$\sigma(\sqrt{d}) = \varepsilon(\sigma)\sqrt{d}$$

zusammenfassen; dabei ist $\varepsilon(\sigma)$ das Signum der Permutation σ .

Umgekehrt gilt: Ist $\delta \in K'$ mit $\sigma(\delta) = \varepsilon(\sigma)\delta$ für alle $\sigma \in S_3$, dann ist $\delta^2 \in K$ und $L = K(\delta)$. Denn $\sigma(\delta^2) = \sigma(\delta)^2 = \varepsilon(\sigma)^2\delta^2 = \delta^2$ für alle $\sigma \in S_3$, also ist $\delta^2 \in \mathcal{F}(S_3) = K$. Da δ von allen $\sigma \in A_3$ fest gelassen wird, gilt entsprechend $\delta \in \mathcal{F}(A_3) = L$. Aus $\delta \in L \setminus K$ folgt $L = K(\delta)$.

Wir werden jetzt ein solches Element δ aus den Nullstellen von f zusammenbauen:

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Eine Permutation σ der drei Nullstellen vertauscht die drei Faktoren und ändert möglicherweise bei einigen von ihnen das Vorzeichen:

$$\frac{\sigma(\delta)}{\delta} = (-1)^{\#\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq 3, \sigma(i) > \sigma(j)\}} = \varepsilon(\sigma),$$

also hat δ die gewünschte Eigenschaft.

$$\text{disc}(f) = d = \delta^2 = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \in K^\times$$

heißt die *Diskriminante* von f . Wir haben dann das folgende Ergebnis:

14.3. Satz. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$ und sei $f \in K[x]$ irreduzibel und separabel mit $\deg(f) = 3$. Ist $\text{disc}(f) \in K^\times$ ein Quadrat in K , dann ist $\text{Gal}(f/K) = A_3$, anderenfalls ist $\text{Gal}(f/K) = S_3$.

SATZ
 $\text{Gal}(f/K) = A_3$ oder S_3

Beweis. Ist $\text{disc}(f) = \delta^2$ kein Quadrat in K , dann ist $\delta \notin K$, also gibt es den quadratischen Zwischenkörper $L = K(\delta)$, und es folgt $2 = [L : K] \mid [K' : K] = \#\text{Gal}(f/K)$, also muss $\text{Gal}(f/K) = S_3$ sein.

Sei jetzt $\text{disc}(f)$ ein Quadrat, also $\delta \in K$. Sei $\sigma \in \text{Gal}(f/K) \subset S_3$. Nach dem oben Gesagten gilt einerseits $\sigma(\delta) = \varepsilon(\sigma)\delta$, andererseits wegen $\delta \in K$ aber auch $\sigma(\delta) = \delta$. Beides zusammen impliziert $\varepsilon(\sigma) = 1$ (beachte, dass $\delta \neq 0$ ist), also $\sigma \in A_3$. Es folgt $A_3 \subset \text{Gal}(f/K) \subset A_3$, also $\text{Gal}(f/K) = A_3$. \square

Aus der Tatsache, dass $\text{disc}(f)$ in jedem Körper enthalten ist, der die Koeffizienten von f enthält, folgt, dass $\text{disc}(f)$ durch diese ausgedrückt werden kann. Um diesen Ausdruck möglichst einfach zu halten, vereinfachen wir unser Polynom f ein wenig. Dafür nehmen wir an, dass $\text{char}(K) \neq 3$ ist. Ähnlich wie man ein Polynom vom Grad 2 durch „quadratisches Ergänzen“ vereinfachen kann, können wir dann durch „kubisches Ergänzen“ den Koeffizienten von x^2 zum Verschwinden bringen. Sei $f = x^3 + ax^2 + bx + c$. Dann ist

$$f\left(x - \frac{1}{3}a\right) = \left(x^3 - ax^2 + \dots\right) + ax^2 + \dots = x^3 + px + q$$

mit Koeffizienten p und q , die gewisse Ausdrücke in a , b und c sind. Die Diskriminante ändert sich dadurch nicht, da wir alle Nullstellen um denselben Betrag $a/3$ verschieben, sodass die Differenzen gleich bleiben.

14.4. Lemma. Für $f = x^3 + px + q$ gilt

$$\text{disc}(f) = -4p^3 - 27q^2.$$

LEMMA
Diskrimi-
nante für
Grad 3

Beweis. Aus $f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$ folgt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = p, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q.$$

Die behauptete Gleichheit folgt dann durch eine einfache, aber umständliche Rechnung. \square

Die Aussage von Satz 14.3 lässt sich verallgemeinern. Dazu definieren wir die Diskriminante für ein beliebiges normiertes Polynom.

* **14.5. Definition.** Seien K ein Körper und $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei K' ein Zerfällungskörper von f über K ; es gelte

DEF
Diskrimi-
nante

$$f = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j) \in K'[x].$$

Dann ist die *Diskriminante* von f definiert als

$$\text{disc}(f) = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \quad \diamond$$

14.6. Lemma. *Seien K ein Körper und $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad n . Dann gilt:*

LEMMA
Diskrimi-
nante und
mehrfache
Nullstellen

- (1) $\text{disc}(f) \in K$.
- (2) $\text{disc}(f) \neq 0$ genau dann, wenn f nur einfache Nullstellen hat; insbesondere ist f dann separabel.

Beweis. Der zweite Teil folgt direkt aus der Definition der Diskriminante. Wenn $\text{disc}(f) = 0$ ist, dann ist $\text{disc}(f) \in K$. Sei also jetzt $\text{disc}(f) \neq 0$. Dann ist f separabel, also ist $K \subset K'$ eine Galois-Erweiterung, wobei K' ein Zerfällungskörper von f über K ist. Die Elemente von $\text{Gal}(f/K) = \text{Aut}(K'/K)$ permutieren die Nullstellen α_j von f und damit die Faktoren in der Definition von $\text{disc}(f)$. Es folgt $\text{disc}(f) \in \mathcal{F}(\text{Aut}(K'/K)) = K$. \square

Man kann sogar zeigen, dass die Diskriminante ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_{n-1} von

$$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ist. Genauer gilt

$$\text{disc}(f) = (-1)^{\binom{n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ n & (n-1)a_{n-1} & (n-2)a_{n-2} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & (n-1)a_{n-1} & \cdots & 2a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & (n-1)a_{n-1} & \cdots & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Das ist eine $(2n - 1)$ -reihige Determinante, in deren ersten $n - 1$ Zeilen die Koeffizienten von f stehen (in jeder Zeile gegenüber der vorigen um einen Platz nach rechts verschoben) und in deren letzten n Zeilen die Koeffizienten der Ableitung f' stehen. Zum Beispiel erhalten wir für $f = x^3 + px + q$:

$$\begin{aligned} \text{disc}(f) &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2p & -3q \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} \\ &= -((-2p)(-2p)p + 3(-3q)(-3q)) = -4p^3 - 27q^2. \end{aligned}$$

Für $f = x^2 + px + q$ erhalten wir die bekannte Formel

$$\text{disc}(f) = - \begin{vmatrix} 1 & p & q \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix} = p^2 - 4q.$$

Die Verallgemeinerung von Satz 14.3 lautet dann wie folgt.

*** 14.7. Satz.** *Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$ und sei $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$ mit $\text{disc}(f) \neq 0$. Dann ist f separabel und es gilt für die Galois-Gruppe $\text{Gal}(f/K) \subset S_n$:*

SATZ
 $\text{Gal} \subset A_n$

$$\text{Gal}(f/K) \subset A_n \iff \text{disc}(f) \text{ ist ein Quadrat in } K.$$

Beweis. Dass aus $\text{disc}(f) \neq 0$ folgt, dass f separabel ist, hatten wir bereits in Lemma 14.6 gesehen. Sei K' ein Zerfällungskörper von f über K und sei $\delta \in K'$ mit $\delta^2 = \text{disc}(f)$, also etwa

$$\delta = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j),$$

wenn $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K'$ die Nullstellen von f sind. Für $\sigma \in \text{Gal}(f/K) \subset S_n$ gilt dann wie vorher $\sigma(\delta) = \varepsilon(\sigma)\delta$. Ist $\text{disc}(f)$ ein Quadrat in K , dann ist $\delta \in K$, also $\sigma(\delta) = \delta$, und es folgt $\varepsilon(\sigma) = 1$ (man beachte $1 \neq -1$ wegen $\text{char}(K) \neq 2$), also $\sigma \in A_n$. Ist $\delta \notin K$, dann ist $L = K(\delta)$ ein Zwischenkörper vom Grad 2 in $K \subset K'$ und es gilt $L = \mathcal{F}(\text{Gal}(f/K) \cap A_n)$, denn

$$\sigma|_L = \text{id}_L \iff \sigma(\delta) = \delta \iff \varepsilon(\sigma) = 1.$$

Dann muss $\text{Gal}(f/K) \cap A_n$ eine echte Untergruppe von $\text{Gal}(f/K)$ sein, also folgt $\text{Gal}(f/K) \not\subset A_n$. \square

Sind x_1, \dots, x_n paarweise verschiedene Elemente eines Körpers K mit $\text{char}(K) \neq 2$, dann gilt für alle $\sigma \in S_n$, dass

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}$$

ist. (Mit $x_j = \alpha_j$ zeigt das die im obigen Beweis verwendete Aussage $\sigma(\delta) = \varepsilon(\sigma)\delta$.) Das kann man wie folgt sehen: Für die Transposition $\tau = (1\ 2)$ gilt

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\tau(i)} - x_{\tau(j)}}{x_i - x_j} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} \prod_{j=3}^n \frac{(x_2 - x_j)(x_1 - x_j)}{(x_1 - x_j)(x_2 - x_j)} \prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = -1 = \varepsilon(\tau).$$

Für beliebige $\rho, \sigma \in S_n$ gilt

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\rho\sigma(i)} - x_{\rho\sigma(j)}}{x_i - x_j} &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_{\rho\sigma(i)} - x_{\rho\sigma(j)})(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})}{(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})(x_i - x_j)} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\rho(\sigma(i))} - x_{\rho(\sigma(j))}}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\rho(i)} - x_{\rho(j)}}{x_i - x_j} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}. \end{aligned}$$

Damit ist $\varepsilon': \sigma \mapsto \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}{x_i - x_j}$ ein Gruppenhomomorphismus $S_n \rightarrow \{\pm 1\}$, der eine Transposition (und damit alle Transpositionen, denn $\varepsilon'(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \varepsilon'(\sigma)(-1)\varepsilon'(\sigma)^{-1} = -1$) auf -1 abbildet. Da die Transpositionen die S_n erzeugen und ε dieselben Eigenschaften hat, muss $\varepsilon' = \varepsilon$ sein.

15. LÖSUNGSFORMELN FÜR GLEICHUNGEN VOM GRAD 3 UND 4

In diesem Abschnitt wollen wir analog zur bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen Lösungsformeln für Gleichungen vom Grad 3 und 4 entwickeln.

Für ein irreduzibles Polynom $f = x^3 + px + q \in K[x]$ vom Grad 3 (dabei nehmen wir $\text{char}(K) \neq 2, 3$ an) haben wir nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts den Körperturm

$$K \subset L = K(\sqrt{\text{disc}(f)}) \subset K',$$

wobei K' der Zerfällungskörper von f ist; die Körpererweiterung $L \subset K'$ ist galoissch mit Galois-Gruppe $A_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Können wir die Elemente von K' (also insbesondere die Nullstellen von f) durch geeignete dritte Wurzeln von Elementen von L ausdrücken? Dazu nehmen wir erst einmal an, dass K eine primitive dritte Einheitswurzel enthält, also ein Element ω mit $\omega^3 = 1$, aber $\omega \neq 1$ (d.h., ω erfüllt die Gleichung $\omega^2 + \omega + 1 = 0$). Sei $\sigma \in \text{Gal}(K'/L)$ ein Erzeuger. Dann ist $\sigma: K' \rightarrow K'$ ein L -linearer Endomorphismus des L -Vektorraums K' , und σ hat Ordnung 3. Das Minimalpolynom von σ als L -linearer Endomorphismus ist dann ein Teiler von $x^3 - 1$, also ist σ diagonalisierbar (hier brauchen wir $\text{char}(K) \neq 3$) und die Eigenwerte von σ sind in $\{1, \omega, \omega^2\}$. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist L mit Dimension 1. Es muss also einen weiteren Eigenwert ω oder ω^2 geben. Tatsächlich treten beide auf: Ist z.B. $\xi \in K$ mit $\sigma(\xi) = \omega^2\xi$, dann ist $\sigma(\xi^2) = \sigma(\xi)^2 = (\omega^2\xi)^2 = \omega\xi^2$.

Sei $\alpha \in K'$ ein Eigenvektor zum Eigenwert ω ; es gelte also $\sigma(\alpha) = \omega\alpha$. Dann ist $a = \alpha^3 \in L$, denn $\sigma(\alpha^3) = (\omega\alpha)^3 = \omega^3\alpha^3 = \alpha^3$, und es folgt $K' = L(\alpha) = L(\sqrt[3]{a})$ (denn $\alpha \in K' \setminus L$).

Wenn K keine primitive dritte Einheitswurzel enthält, dann adjungieren wir eine, ersetzen K also durch $K(\omega) = K(\sqrt{-3})$. (Es ist ja $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.) Um eine explizite Formel zu bekommen, müssen wir noch herausfinden, wie wir das Element a durch $\sqrt{\text{disc}(f)}$ und die Koeffizienten von f ausdrücken können. Seien dazu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von f in K' . Wir können die Nummerierung so wählen, dass $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2, \sigma(\alpha_2) = \alpha_3$ und $\sigma(\alpha_3) = \alpha_1$ ist. Dann gilt für $\alpha = \alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3$:

$$\sigma(\alpha) = \alpha_2 + \omega^2\alpha_3 + \omega\alpha_1 = \omega(\omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3 + \alpha_1) = \omega\alpha,$$

also liegt α im richtigen Eigenraum. Wir machen noch ein paar vorbereitende Rechnungen. Sei dazu

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3) = (\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_1) - (\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_1^2)$$

eine Quadratwurzel aus $\text{disc}(f)$. Aus einem Koeffizientenvergleich

$$x^3 + px + q = f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

folgt

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = p \quad \text{und} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -q$$

und damit

$$\begin{aligned} & (\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_1) + (\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_1^2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= 3q \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^3 - 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) + 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &= -3q.\end{aligned}$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned}a = \alpha^3 &= (\alpha_1 + \omega^2\alpha_2 + \omega\alpha_3)^3 \\ &= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + 6\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &\quad + 3\omega(\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha_3^2) + 3\omega^2(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_3^2\alpha_1 + \alpha_2^2\alpha_3) \\ &= -3q - 6q + \frac{3}{2}\omega(3q - \delta) + \frac{3}{2}\omega^2(3q + \delta) \\ &= -\frac{27}{2}q - \frac{3\sqrt{-3}}{2}\delta \\ &= 27\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

(bei geeigneter Wahl der Quadratwurzel). Mit $\bar{\alpha} = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \omega^2\alpha_3$ und $\bar{a} = \bar{\alpha}^3$ erhalten wir analog

$$\bar{a} = 27\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}\right).$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha} &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 3(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) \\ &= -3p.\end{aligned}$$

Wegen

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}((\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha + \bar{\alpha}) = \frac{1}{3}(\alpha + \bar{\alpha})$$

ist

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}};$$

dabei sind die dritten Wurzeln so zu wählen, dass ihr Produkt $-p/3$ ist.

Wir halten fest (α und $\bar{\alpha}$ im Satz entsprechen $\bar{\alpha}/3$ und $\alpha/3$ in der Überlegung oben):

15.1. Satz. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2, 3$ und sei $f = x^3 + px + q \in K[x]$. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung, die eine primitive dritte Einheitswurzel ω und die Nullstellen von f enthält.

Sei weiter $d = (p/3)^3 + (q/2)^2 = -\text{disc}(f)/(4 \cdot 27)$ und $\delta = \sqrt{d} \in K'$ eine Quadratwurzel von d . Seien $\alpha = \sqrt[3]{-q/2 + \delta}$, $\bar{\alpha} = \sqrt[3]{-q/2 - \delta} \in K'$ dritte Wurzeln mit $\alpha\bar{\alpha} = -p/3$. Dann sind die Nullstellen von f in K' gegeben durch

$$\alpha_1 = \alpha + \bar{\alpha}, \quad \alpha_2 = \omega\alpha + \omega^2\bar{\alpha} \quad \text{und} \quad \alpha_3 = \omega^2\alpha + \omega\bar{\alpha}.$$

Diese Formeln gehen auf **Tartaglia** und **del Ferro** (ca. 1515) zurück. **Cardano** veröffentlichte sie als Erster (1545), nachdem er unveröffentlichte Notizen von del Ferro dazu gesehen hatte, obwohl Tartaglia ihm die Formeln nur unter der Bedingung verraten hatte, dass er sie geheim hält.



N. Tartaglia
(1499?–1557)

SATZ
Lösungsformel
für kubische
Gleichungen



G. Cardano
(1501–1576)

Beweis. Dass $\delta, \alpha, \bar{\alpha} \in K'$ sind, folgt aus den vorhergehenden Überlegungen (und in jedem Fall könnte man K' geeignet wählen). Man rechnet nun nach:

$$(\alpha\bar{\alpha})^3 = \alpha^3\bar{\alpha}^3 = \left(-\frac{q}{2} + \delta\right)\left(-\frac{q}{2} - \delta\right) = \left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2\right) = \left(-\frac{p}{3}\right)^3,$$

also können α und $\bar{\alpha}$ wie angegeben gewählt werden. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= (1 + \omega + \omega^2)\alpha + (1 + \omega^2 + \omega)\bar{\alpha} = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 &= (\omega + \omega^2 + 1)\alpha^2 + (\omega^2 + \omega + 1)\bar{\alpha}^2 \\ &\quad + (\omega^2 + \omega + \omega + \omega^2 + \omega^2 + \omega)\alpha\bar{\alpha} \\ &= -3\alpha\bar{\alpha} = p, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 &= \alpha^3 + \bar{\alpha}^3 + (\omega^2 + \omega + 1)\alpha^2\bar{\alpha} + (1 + \omega^2 + \omega)\alpha\bar{\alpha}^2 \\ &= \alpha^3 + \bar{\alpha}^3 = -\frac{q}{2} + \delta - \frac{q}{2} - \delta = -q.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt durch Koeffizientenvergleich in

$$f = x^3 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3). \quad \square$$

Für diesen Beweis haben wir die Galois-Theorie nicht gebraucht, wohl aber dafür, die Formel herzuleiten.

15.2. Beispiel. Seien $K = \mathbb{Q}$, $K' = \mathbb{C}$ und $f = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Wir haben also $p = -3$ und $q = 1$. Das ergibt

BSP
 $x^3 - 3x + 1$

$$d = (p/3)^3 + (q/2)^2 = -1 + 1/4 = -3/4,$$

also $\delta = \sqrt{-3}/2$. Für α haben wir $\alpha = \sqrt[3]{-1/2 + \sqrt{-3}/2} = \sqrt[3]{\omega}$ (mit $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + \sqrt{-3})/2$ wie oben), also können wir $\alpha = \zeta_9 = e^{2\pi i/9}$ nehmen; das ergibt dann $\bar{\alpha} = 1/\alpha = \zeta_9^{-1}$. Die Nullstellen von f sind demnach

$$\begin{aligned}\zeta_9 + \zeta_9^{-1} &= 2 \cos \frac{2\pi}{9}, \\ \omega\zeta_9 + \omega^2\zeta_9^{-1} &= \zeta_9^4 + \zeta_9^{-4} = 2 \cos \frac{8\pi}{9} \quad \text{und} \\ \omega^2\zeta_9 + \omega\zeta_9^{-1} &= \zeta_9^{-2} + \zeta_9^2 = 2 \cos \frac{4\pi}{9}.\end{aligned} \quad \clubsuit$$

In diesem Beispiel mussten wir mit echt komplexen Zahlen rechnen (δ ist rein imaginär), obwohl die Nullstellen alle reell sind. Das ist kein Zufall.

15.3. Lemma. Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ normiert mit $\deg(f) = 3$. Dann hat f entweder genau eine oder genau drei reelle Nullstellen (mit Vielfachheit gerechnet). Der erste Fall tritt ein, wenn $\text{disc}(f) < 0$ ist, der zweite Fall, wenn $\text{disc}(f) \geq 0$ ist.

LEMMA
kubische
Polynome
über \mathbb{R}

Beweis. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von f . Es ist

$$\text{disc}(f) = (\alpha_1 - \alpha_2)^2(\alpha_1 - \alpha_3)^2(\alpha_2 - \alpha_3)^2.$$

Sind die Nullstellen reell, dann ist $\text{disc}(f)$ Quadrat einer reellen Zahl, also ≥ 0 . Sind nicht alle Nullstellen reell, dann gibt es eine reelle Nullstelle α und ein Paar zueinander konjugierter echt komplexer Nullstellen β und $\bar{\beta}$. Dann ist

$$\text{disc}(f) = ((\alpha - \beta)(\alpha - \bar{\beta}))^2(\beta - \bar{\beta})^2 < 0,$$

denn der erste Faktor ist das Quadrat der von null verschiedenen reellen Zahl $\alpha^2 - 2\alpha \operatorname{Re} \beta + |\beta|^2$ und der zweite Faktor ist $-4(\operatorname{Im} \beta)^2 < 0$. \square

Da wir für die Lösungsformel die Quadratwurzel aus $-\operatorname{disc}(f)/108$ brauchen, ist diese genau dann rein imaginär, wenn die Nullstellen von f alle reell sind. Diese Beobachtung ('*casus irreducibilis*' genannt) hat übrigens in der historischen Entwicklung letztendlich zur Anerkennung der komplexen Zahlen geführt, nicht etwa der Wunsch, einer Gleichung wie $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung zu verschaffen. Denn man konnte ja akzeptieren, dass so eine Gleichung keine (reelle) Lösung hat, während im kubischen Fall drei reelle Lösungen existieren konnten, zu deren Berechnung man aber die komplexen Zahlen benötigte.

Für die Lösung einer Gleichung vom Grad 4 gehen wir erst einmal davon aus, dass das zugehörige Polynom Galois-Gruppe S_4 hat. In der S_4 gibt es als Normalteiler die *Kleinsche Vierergruppe* $V_4 = \{\operatorname{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. Es ist $S_4/V_4 \cong S_3$ (S_4 operiert auf den drei nichttrivialen Elementen von V_4 durch Konjugation, das liefert einen Homomorphismus in die S_3 mit Kern V_4). Der entsprechende Zwischenkörper ist dann galoissch über dem Grundkörper mit Galois-Gruppe S_3 ; man sollte ihn also durch Lösen einer geeigneten kubischen Gleichung erhalten können. Die verbleibende Erweiterung bis zum Zerfällungskörper hat dann Galois-Gruppe $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und ist durch Quadratwurzeln erzeugbar. Die Nullstellen der kubischen Gleichung sollten also gerade den Fixkörper von V_4 erzeugen. Wie bei quadratischen und kubischen Gleichungen können wir durch geeignete Verschiebung erreichen, dass das Polynom vierten Grades, dessen Nullstellen wir berechnen wollen, die Form $f = x^4 + px^2 + qx + r$ hat. Wir bezeichnen die Nullstellen von f mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Dann sind die Elemente

$$\beta = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4), \quad \beta' = (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4) \quad \text{und} \quad \beta'' = (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3)$$

in $\mathcal{F}(V_4)$, denn sie sind unter den Permutationen in V_4 invariant. Aus der Relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$ folgt

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = -\beta, \quad (\alpha_1 + \alpha_3)^2 = -\beta' \quad \text{und} \quad (\alpha_1 + \alpha_4)^2 = -\beta'',$$

sodass mit geeigneten Quadratwurzeln gilt

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}((\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_4)) = \frac{1}{2}(\sqrt{-\beta} + \sqrt{-\beta'} + \sqrt{-\beta''}).$$

Man kann folgende Beziehung nachrechnen:

$$(x - \beta)(x - \beta')(x - \beta'') = x^3 - 2px^2 + (p^2 - 4r)x + q^2.$$

Außerdem ist $(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_4) = -q$. Wir fassen zusammen:

15.4. Satz. *Seien K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2, 3$ und $f = x^4 + px^2 + qx + r \in K[x]$. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung, die eine primitive dritte Einheitswurzel ω und die Nullstellen von f enthält.*

Sei $g = x^3 - 2px^2 + (p^2 - 4r)x + q^2$. Dann zerfällt g über K' in Linearfaktoren. Seien $\beta, \beta', \beta'' \in K'$ die Nullstellen von g (die man mit Satz 15.1 bestimmen kann). Seien weiter $\gamma = \sqrt{-\beta}, \gamma' = \sqrt{-\beta'}$ und $\gamma'' = \sqrt{-\beta''}$ Quadratwurzeln in K' , sodass

SATZ
Lösungsformel
für
Gleichungen
vom Grad 4

$\gamma\gamma'\gamma'' = -q$ ist. Dann sind die Nullstellen von f gegeben durch

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}(\gamma + \gamma' + \gamma''), \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(\gamma - \gamma' - \gamma''), \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}(-\gamma + \gamma' - \gamma'') \quad \text{und} \\ \alpha_4 &= \frac{1}{2}(-\gamma - \gamma' + \gamma'').\end{aligned}$$

Die Formeln gehen auf **Ferrari** (ca. 1545) zurück.

Beweis. Man rechnet die relevanten Beziehungen nach, analog zum Beweis von Satz 15.1. □

15.5. Definition. Das Polynom g heißt die *kubische Resolvente* von f . Es gilt $\text{disc}(g) = \text{disc}(f)$, denn es ist $\beta - \beta' = (\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2)$; die anderen Differenzen sind analog darstellbar. ◇

DEF
kubische
Resolvente

15.6. Beispiel. Seien $K = \mathbb{Q}$, $K' = \mathbb{C}$ und $f = x^4 - 10x^2 + 1$. Die kubische Resolvente ist $g = x^3 + 20x^2 + 96x = x(x+8)(x+12)$. Ihre Nullstellen sind $\beta = 0$, $\beta' = -8$, $\beta'' = -12$. Wir können also $\gamma = 0$, $\gamma' = 2\sqrt{2}$, $\gamma'' = 2\sqrt{3}$ wählen und erhalten die Nullstellen

BSP
 $x^4 - 10x^2 + 1$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad -\sqrt{2} - \sqrt{3}, \quad \sqrt{2} - \sqrt{3} \quad \text{und} \quad -\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

In diesem Fall könnte man die Lösungen auch durch sukzessives Lösen zweier quadratischer Gleichungen finden: $x^2 = 5 \pm 2\sqrt{6}$, also sind die Lösungen $\pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$. Tatsächlich ist $(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})^2 = 5 \pm 2\sqrt{6}$; der Satz liefert die einfachere Form direkt. ♣

Die kubische Resolvente erlaubt es uns auch, zwischen den verschiedenen Möglichkeiten für die Galois-Gruppe eines irreduziblen Polynoms vom Grad 4 zu unterscheiden. Grundsätzlich gilt folgende Aussage:

15.7. Lemma. Sei K ein Körper und sei $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom ohne mehrfache Nullstellen in seinem Zerfällungskörper. f ist genau dann irreduzibel, wenn die Galois-Gruppe $\text{Gal}(f/K)$ auf den Nullstellen von f transitiv operiert.

LEMMA
Kriterium
für
irreduzibel

Beweis. Sei K' ein Zerfällungskörper von f über K . Dann ist $\text{Gal}(f/K) = \text{Aut}(K'/K)$. Wenn diese Gruppe transitiv auf den Nullstellen von f operiert, dann ist f nach Lemma 11.5 irreduzibel. Ist die Operation nicht transitiv, dann führt jede Bahn wiederum nach Lemma 11.5 zu einem nichttrivialen Teiler von f in $K[x]$, also ist in diesem Fall f nicht irreduzibel. □

Etwas genauer gilt also, dass die Bahnen der Operation von $\text{Gal}(f/K)$ auf den Nullstellen von f in K' genau den irreduziblen Faktoren von f entsprechen.

Die transitiv operierenden Untergruppen der S_4 sind (bis auf Konjugation)

- (1) die zyklische Gruppe $C_4 = \langle (1\ 2\ 3\ 4) \rangle$,
- (2) die Kleinsche Vierergruppe V_4 ,
- (3) die Diedergruppe $D_4 = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$,
- (4) die alternierende Gruppe A_4 und
- (5) die symmetrische Gruppe S_4 selbst.

Davon sind die V_4 und die A_4 in der A_4 enthalten, die übrigen Gruppen nicht (denn ein Viererzykel ist eine ungerade Permutation). Da wir über die Diskriminante feststellen können, ob die Galois-Gruppe in der A_4 enthalten ist, müssen wir noch zwischen V_4 und A_4 bzw. zwischen C_4 , D_4 und S_4 unterscheiden. Dazu betrachten wir die Anzahl der Nullstellen der kubischen Resolvente in K . Wenn eine Nullstelle, zum Beispiel $\beta' = (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)$, in K liegt, dann muss jedes Element $\sigma \in \text{Gal}(f/K) \subset S_4$ dieses Element fest lassen, was dazu äquivalent ist, dass σ die Partition $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ von $\{1, 2, 3, 4\}$ fest lässt. Das bedeutet $\text{Gal}(f/K) \subset D_4$. (Beachte, dass die kubische Resolvente g keine mehrfachen Nullstellen hat, denn $\text{disc}(g) = \text{disc}(f) \neq 0$.) Sind alle drei Nullstellen von g in K , dann folgt entsprechend $\text{Gal}(f/K) \subset V_4$.

15.8. Satz. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$ und sei $f \in K[x]$ irreduzibel vom Grad 4. Wir setzen $d = \text{disc}(f) \neq 0$. Seien weiter g die kubische Resolvente von f und n die Anzahl der Nullstellen von g in K . Dann ergibt sich die Galois-Gruppe $\text{Gal}(f/K)$ aus folgender Tabelle (dabei heißt „ $d = \square$ “, dass d ein Quadrat in K ist):

SATZ
Galois-
Gruppen
Grad 4

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 3$
$d = \square$	A_4	–	V_4
$d \neq \square$	S_4	C_4, D_4	–

Die Unterscheidung zwischen C_4 und D_4 ist etwas schwieriger; wir werden das hier nicht ausführen. Man kann aber im Fall „ C_4 oder D_4 “ geeignete Ausdrücke D in den Koeffizienten von f und der Nullstelle von g in K konstruieren, sodass (wenn $D \neq 0$ ist, anderenfalls muss man einen anderen Ausdruck verwenden) man genau dann im Fall C_4 ist, wenn D ein Quadrat in K ist. In den Beispielen unten werden wir statt dessen ad-hoc-Argumente verwenden.

Ist $b \in K$ die einzige Nullstelle von g in K und hat f die Form $f = x^4 + px^2 + qx + r$, dann sei $D = 2b^2p - 3bp^2 - 4br - 3q^2$. Ist $D \neq 0$, dann ist die Galois-Gruppe genau dann C_4 , wenn D ein Quadrat in K ist. Dieser Ausdruck ergibt sich (mit $b = \beta'$) aus

$$((\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_3^2\alpha_4 + \alpha_4^2\alpha_1) - (\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3^2 + \alpha_3\alpha_4^2 + \alpha_4\alpha_1^2))^2.$$

Die Elemente der C_4 lassen beide Terme in der Differenz fest, während die zusätzlichen Elemente der D_4 die beiden Terme vertauschen. Die Galois-Gruppe ist also genau dann die C_4 , wenn die Differenz in K ist, jedenfalls dann, wenn diese Differenz nicht verschwindet.

Bevor wir uns Beispiele anschauen, überlegen wir noch Folgendes:

Sei $f \in K[x]$ vom Grad 4 mit kubischer Resolvente g . Ist g irreduzibel, dann operiert $G = \text{Gal}(f/K)$ transitiv auf den Nullstellen von g . Damit ist das Bild von G unter $G \hookrightarrow S_4 \rightarrow S_3$ mindestens die A_3 . Ist f nicht irreduzibel, dann muss f eine Nullstelle in K haben, denn im verbleibenden Fall, dass f Produkt zweier irreduzibler Faktoren vom Grad 2 ist, ist $G \subset \langle (12), (34) \rangle$ (wobei wir die Nullstellen so nummeriert haben, dass die ersten beiden zu einem der irreduziblen Faktoren gehören) und damit $\#G$ ein Teiler von 4, sodass das Bild von G in S_3 nicht durch 3 teilbare Ordnung haben kann. Also:

Ist g irreduzibel und hat f keine Nullstelle in K , dann ist auch f irreduzibel.

15.9. Beispiele. Wie üblich sei $K = \mathbb{Q}$.

- (1) $f = x^4 + x + 1$. Dann ist f irreduzibel nach dem Reduktionskriterium mit $p = 2$ (denn $x^4 + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[x]$) und $g = x^3 - 4x + 1$ mit $\text{disc}(f) = \text{disc}(g) = -4(-4)^3 - 27 \cdot 1^2 = 256 - 27 = 229$.

BSP
Grad 4:
Galois-
Gruppen

g ist irreduzibel (da ohne rationale Nullstelle; nur ± 1 kommen infrage) und $\text{disc}(f)$ ist kein Quadrat, also ist $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = S_4$.

- (2) $f = x^4 + 3x^2 - 7x + 4$. Dann ist $g = x^3 - 6x^2 - 7x + 49$. Zur Berechnung der Diskriminante betrachten wir $g(x+2) = x^3 - 19x + 19$; es ergibt sich

$$\text{disc}(f) = \text{disc}(g) = -4(-19)^3 - 27 \cdot 19^2 = 17689 = 133^2.$$

Außerdem ist $g(x+2)$ irreduzibel nach Eisenstein mit $p = 19$. f hat keine rationale Nullstelle (nur $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ kommen infrage), also ist f irreduzibel und $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = A_4$.

- (3) $f = x^4 - 2$; f ist irreduzibel nach Eisenstein mit $p = 2$. Die kubische Resolvente ist $g = x^3 + 8x = x(x^2 + 8)$; der zweite Faktor ist irreduzibel, also ist die Galois-Gruppe C_4 oder D_4 . Wir wissen, dass f zwei reelle und ein Paar konjugiert komplexe Nullstellen hat. Die komplexe Konjugation liefert ein Element von $\text{Gal}(f/\mathbb{Q})$, das genau zwei Nullstellen vertauscht. Damit kann $\text{Gal}(f/\mathbb{Q})$ nicht C_4 sein, also ist $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = D_4$.
- (4) $f = x^4 + 1$. Es ist $f(x+1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$; dieses Polynom ist irreduzibel nach Eisenstein mit $p = 2$. Es ist $g = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ mit drei rationalen Nullstellen, also ist die Galois-Gruppe V_4 .
- (5) $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Die Nullstellen von f sind gerade die fünften Einheitswurzeln außer 1, also $\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$ mit $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta) \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f . Wir wissen bereits, dass $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \cong C_4$ ist. Unabhängig davon könnten wir auch wie folgt argumentieren. Wir bestimmen die kubische Resolvente. Zunächst eliminieren wir den Term mit x^3 aus f :

$$f\left(x - \frac{1}{4}\right) = x^4 + \frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{205}{256};$$

damit ist die Resolvente

$$g = x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{45}{16}x + \frac{25}{64}.$$

Mögliche rationale Nullstellen von g erfüllen $64x^3 - 80x^2 - 180x + 25 = 0$, der Zähler muss also ein Teiler von 25 und der Nenner ein Teiler von 64 sein. Man findet die Nullstelle $-5/4$ und damit

$$g = \left(x + \frac{5}{4}\right) \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{16}\right).$$

Die Diskriminante des zweiten Faktors ist $(-5/2)^2 - 4 \cdot 5/16 = 5$ und damit kein Quadrat. Also hat g genau eine Nullstelle, und die Galois-Gruppe von f muss C_4 oder D_4 sein. Da $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ ist, gilt $\#\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = \#\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \deg(f) = 4$, also ist $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = C_4$. ♣

16. RADIKALERWEITERUNGEN UND AUFLÖSBARE GRUPPEN

Wir wollen jetzt der Frage nachgehen, ob es auch für Polynome vom Grad ≥ 5 Lösungsformeln der gleichen Art gibt wie für Polynome vom Grad 2, 3 oder 4. Dazu formalisieren wir zunächst einmal, was eine „Lösungsformel der gleichen Art“ sein soll. Die Idee ist, dass wir außer den vier Grundrechenarten auch das Ziehen von beliebigen n -ten Wurzeln zulassen wollen. Das führt auf den folgenden Begriff („radikal“ kommt von lateinisch „radix“ für „Wurzel“):

* **16.1. Definition.** Sei K ein Körper. Eine *Radikalerweiterung* von K ist eine Körpererweiterung $K \subset K'$, sodass es einen Turm von Körpererweiterungen

DEF
Radikal-
erweiterung

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m$$

gibt mit $K' \subset K_m$ und der Eigenschaft, dass es für jedes $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ein Element $a_j \in K_{j-1}$ und eine Zahl $n_j \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\text{char}(K) \nmid n_j$ gibt, sodass K_j der Zerfällungskörper von $X^{n_j} - a_j$ über K_{j-1} ist. \diamond

Man erhält also K_j aus K_{j-1} durch Adjunktion aller n_j -ten Wurzeln aus a_j . Das bedeutet gerade, dass sich alle Elemente von K' durch einen *Radikalausdruck* über K darstellen lassen, also eine Formel der oben beschriebenen Art, in die Elemente von K eingesetzt werden.

Das ist analog zur Definition von konstruierbaren Elementen: Dort sind alle $n_j = 2$. Wir kommen darauf am Ende dieses Abschnitts zurück.

Die Ergebnisse aus Abschnitt 15 lassen sich dann so interpretieren, dass der Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad höchstens 4 über K eine Radikalerweiterung von K ist (falls $\text{char}(K) \neq 2, 3$).

Unser Ziel in diesem Abschnitt wird es sein, das folgende Ergebnis zu beweisen:

* **16.2. Satz.** Sei $K \subset K'$ eine endliche Körpererweiterung mit $\text{char}(K) = 0$. K' ist genau dann eine Radikalerweiterung von K , wenn es eine endliche Galois-Erweiterung $K \subset L$ gibt, deren Galois-Gruppe auflösbar ist, und sodass $K' \subset L$ ist.

SATZ
Charakteri-
sierung von
Radikal-
erweiterungen

Was ist eine auflösbare Gruppe?

* **16.3. Definition.** Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn es eine Kette von Untergruppen

DEF
auflösbare
Gruppe

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

in G gibt, sodass für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Untergruppe G_{j-1} ein Normalteiler von G_j mit abelscher Faktorgruppe G_j/G_{j-1} ist. \diamond

Es ist nicht schwer zu sehen, dass Untergruppen und Faktorgruppen von auflösbaren Gruppen wieder auflösbar sind. Eine Umkehrung gilt ebenfalls.

16.4. Lemma. *Seien G eine auflösbare Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Dann ist U ebenfalls auflösbar.*

LEMMA
Untergruppe
auflösbar

Beweis. Sei

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

eine Kette von Untergruppen wie in Definition 16.3. Für $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sei $U_j = U \cap G_j$. Dann ist

$$\{1\} = U_0 \leq U_1 \leq \dots \leq U_n = U$$

eine Kette von Untergruppen von U . Für gegebenes $j \geq 1$ betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\phi_j: U_j = U \cap G_j \rightarrow G_j \rightarrow G_j/G_{j-1}$. Sein Kern ist $U_j \cap G_{j-1} = U \cap G_{j-1} = U_{j-1}$, also ist $U_{j-1} \triangleleft U_j$, und wir bekommen nach dem Homomorphiesatz für Gruppen EZAS.14.6 einen *injektiven* Gruppenhomomorphismus $U_j/U_{j-1} \rightarrow G_j/G_{j-1}$. Da G_j/G_{j-1} nach Voraussetzung abelsch ist, gilt das auch für U_j/U_{j-1} , denn diese Gruppe ist zu einer Untergruppe von G_j/G_{j-1} isomorph. Damit ist U auflösbar. \square

16.5. Lemma. *Seien G eine Gruppe und $N \triangleleft G$ ein Normalteiler. G ist genau dann auflösbar, wenn sowohl N als auch die Faktorgruppe G/N auflösbar sind.*

LEMMA
Faktorgruppe
auflösbar

Beweis. “ \Rightarrow ”: Sei G auflösbar. Nach Lemma 16.4 ist dann auch N auflösbar. Um zu zeigen, dass G/N auflösbar ist, sei $\phi: G \rightarrow G/N$ der kanonische Epimorphismus, und

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

eine Kette von Untergruppen wie in Definition 16.3. Wir setzen $Q_j = \phi(G_j) \leq G/N$; dann ist

$$\{1_{G/N}\} = Q_0 \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_n = G/N$$

eine Kette von Untergruppen von G/N mit $Q_{j-1} \triangleleft Q_j$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. (Dass Q_{j-1} ein Normalteiler von Q_j ist, folgt daraus, dass ein surjektiver Gruppenhomomorphismus Normalteiler auf Normalteiler abbildet; vgl. EZAS.14.3.) Der Kern von $G_j \xrightarrow{\phi} Q_j \rightarrow Q_j/Q_{j-1}$ enthält G_{j-1} , also erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $G_j/G_{j-1} \rightarrow Q_j/Q_{j-1}$ (EZAS.14.6). Damit ist Q_j/Q_{j-1} (als Faktorgruppe einer abelschen Gruppe) abelsch, und G/N ist auflösbar.

“ \Leftarrow ”: Seien N und G/N auflösbar, und seien

$$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_m = N \quad \text{und} \quad \{1_{G/N}\} = Q_0 \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_n = G/N$$

Ketten von Untergruppen wie in Definition 16.3. Für $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ sei $G_j = N_j$ und für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ sei $G_{m+k} = \phi^{-1}(Q_k)$, wobei $\phi: G \rightarrow G/N$ der kanonische Epimorphismus ist (beide Definitionen von $G_m = N$ stimmen überein). Dann ist

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_{m-1} \leq G_m = N \leq G_{m+1} \leq \dots \leq G_{m+n} = G$$

eine Kette von Untergruppen von G mit $G_{j-1} \triangleleft G_j$ für alle $j \geq 1$ (für $j > m$ verwenden wir, dass Urbilder von Normalteilern unter Gruppenhomomorphismen wieder Normalteiler sind; vgl. EZAS.14.3), und es gilt $G_j/G_{j-1} = N_j/N_{j-1}$ für $j \leq m$ und $G_j/G_{j-1} \cong Q_{j-m}/Q_{j-m-1}$ für $j > m$; alle Faktorgruppen sind nach Voraussetzung abelsch, also ist G auflösbar. \square

16.6. Lemma. *Ist G endlich, dann kann man in Definition 16.3 sogar verlangen, dass die Faktorgruppen G_j/G_{j-1} zyklisch (und von Primzahlordnung) sind.*

LEMMA
zyklische
Faktorgruppen

Beweis. Durch Induktion über $\#G$. Die Aussage ist klar für $\#G = 1$. Sei G also nichttrivial und auflösbar und sei $G_{n-1} \triangleleft G_n = G$ der letzte Schritt in der Kette von Untergruppen aus Definition 16.3; dabei sei ohne Einschränkung $G_{n-1} \neq G$. Nach Induktionsvoraussetzung (angewandt auf die nach Lemma 16.4 auflösbare Gruppe G_{n-1}) können wir annehmen, dass die Faktorgruppen G_j/G_{j-1} zyklisch von Primzahlordnung sind für $j < n$. Dann gibt es eine Untergruppe $Q \subset G/G_{n-1}$ von Primzahlordnung (nach dem 1. Satz von Sylow 3.2 oder dem Klassifikationsatz für endliche abelsche Gruppen EZAS.15.14). Da G/G_{n-1} abelsch ist, ist Q Normalteiler. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf $(G/G_{n-1})/Q$ (beachte $\#(G/G_{n-1})/Q < \#G/G_{n-1} \leq \#G$), gibt es eine Kette

$$\{1_{(G/G_{n-1})/Q}\} \leq Q'_1 \leq \dots \leq Q'_m = (G/G_{n-1})/Q$$

mit Faktorgruppen, die zyklisch von Primzahlordnung sind. Wie im Beweis von Lemma 16.5 können wir diese Kette zunächst zu einer Kette

$$\{1_{G/G_{n-1}}\} \leq Q \leq Q_1 \leq \dots \leq G/G_{n-1}$$

für G/G_{n-1} hochheben und dann mit der Kette für G_{n-1} zu einer Kette für G mit den gewünschten Eigenschaften zusammensetzen. \square

In einer Kette von Untergruppen, von denen jede ein Normalteiler der folgenden ist, können wir offensichtlich annehmen, dass die Untergruppen alle verschieden sind. Ist eine der Faktorgruppen G_j/G_{j-1} nicht einfach, dann können wir die Kette „verfeinern“, indem wir $\phi^{-1}(N)$ zwischen G_{j-1} und G_j einfügen, wobei $N \triangleleft G_j/G_{j-1}$ ein nichttrivialer Normalteiler und $\phi: G_j \rightarrow G_j/G_{j-1}$ der kanonische Epimorphismus ist. Eine solche Kette, die nicht weiter verfeinert werden kann, bei der also jede Faktorgruppe einfach ist, heißt eine *Kompositionsreihe* von G ; die Faktorgruppen heißen die *Kompositionsfaktoren* von G . Nach dem Satz von **Jordan-Hölder** sind die Kompositionsfaktoren (für eine endliche Gruppe) bis auf Reihenfolge und Isomorphie eindeutig bestimmt (das kann man als ein Analogon des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen betrachten). Eine endliche Gruppe ist also genau dann auflösbar, wenn ihre Kompositionsfaktoren abelsch sind.

Es gibt recht allgemeine Sätze, die sagen, dass bestimmte endliche Gruppen auflösbar sind:

16.7. Satz. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $\#G = p^a q^b$, wobei p und q Primzahlen sind. Dann ist G auflösbar.*

SATZ
Satz von
Burnside

16.8. Satz. *Jede endliche Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar.*

SATZ
Satz von
Feit und
Thompson

Die Beweise sind im Rahmen dieser Vorlesung nicht zu leisten. (Der Originalbeweis von Feit und Thompson von 1963 hat 250 Seiten. 2012 wurde dieser Beweis mit maschineller Unterstützung formal verifiziert, ein Projekt, das eine Reihe von Mathematikern etliche Jahre beschäftigt hat.)

Die Existenz der Lösungsformeln für Gleichungen von Grad ≤ 4 hängt mit folgender Tatsache zusammen:

16.9. Satz. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Die symmetrische Gruppe S_n ist genau dann auflösbar, wenn $n \leq 4$ ist.

SATZ
Auflösbar-
keit von S_n

Beweis. Die Gruppen S_1 und S_2 sind abelsch und daher trivialerweise auflösbar. Die Gruppe S_3 enthält den abelschen Normalteiler A_3 mit abelscher Faktorgruppe $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ist also ebenfalls auflösbar. In der S_4 haben wir die Kette $\{\text{id}\} \leq V_4 \leq A_4 \leq S_4$ mit abelschen Faktorgruppen $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V_4 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Sei jetzt $n \geq 5$. Dann ist die Untergruppe $A_n \leq S_n$ eine nicht-abelsche einfache Gruppe. Wäre S_n auflösbar, dann müsste nach Lemma 16.4 auch A_n auflösbar sein. Eine einfache Gruppe hat aber (definitionsgemäß) keine nicht-trivialen Normalteiler, also könnte die Länge der Untergruppen-Kette nur 1 sein. Die Faktorgruppe $A_n/\{\text{id}\} \cong A_n$ ist aber nicht abelsch, also kann die Bedingung für Auflösbarkeit nicht erfüllt werden. \square

Tatsächlich haben wir die im Beweis für $n = 3$ und $n = 4$ angegebenen Ketten von Untergruppen für die Konstruktion der Lösungsformeln benutzt.

Aus Satz 16.9 und Satz 16.2 folgt, dass die Nullstellen eines irreduziblen Polynoms vom Grad $n \geq 5$, dessen Galois-Gruppe S_n (oder A_n) ist, nicht durch einen Radikalausdruck gegeben werden können. Dieses Resultat (Satz von Abel-Ruffini) wurde sehr viel später erhalten als die expliziten Formeln für niedrigere Grade, die ja aus dem 16. Jahrhundert stammen. Wie in vielen anderen ähnlichen Fällen auch liegt das daran, dass ein Unmöglichkeitbeweis oft sehr viel schwieriger zu führen ist als der Nachweis, dass ein Objekt mit gewissen Eigenschaften (wie die expliziten Lösungsformeln) existiert: Auf die Lösungsformeln kann man mit genügend Intuition und Hartnäckigkeit kommen (und ihre Gültigkeit kann man dann ohne allzu große Schwierigkeiten beweisen), während man für den Beweis ihrer Nicht-Existenz erst einmal die Theorie der Radikalerweiterungen (und dafür wiederum die Galois-Theorie) aufbauen muss.



N.H. Abel
1802–1829

Ein wesentlicher Schritt im Beweis von Satz 16.2 wird durch das folgende Lemma geleistet.

16.10. Lemma. Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit $\text{char}(K) \nmid n$; K enthalte eine primitive n -te Einheitswurzel ζ .

LEMMA
zyklische
Galois-Gruppe

- (1) Seien $a \in K \setminus \{0\}$ und K' der Zerfällungskörper von $X^n - a$ über K . Dann ist $K \subset K'$ galoissch mit zyklischer Galois-Gruppe, deren Ordnung ein Teiler von n ist.
- (2) Sei $K \subset K'$ eine galoissche Körpererweiterung mit zyklischer Galois-Gruppe der Ordnung n . Dann gibt es $a \in K$, sodass K' der Zerfällungskörper von $X^n - a$ über K ist.

Beweis.

- (1) $K \subset K'$ ist galoissch nach Folgerung 12.7, da K' der Zerfällungskörper des (wegen $\text{char}(K) \nmid n$) separablen Polynoms $X^n - a$ über K ist.

Sei $\alpha \in K'$ mit $\alpha^n = a$ eine Nullstelle von $X^n - a$. Dann sind alle Nullstellen von der Form $\zeta^j \alpha$ mit $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Wegen $\zeta \in K$ ist $K' = K(\alpha)$. Ein Automorphismus $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ ist dann durch $\gamma(\alpha)$ festgelegt. Wir definieren $\Phi: \text{Gal}(K'/K) \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto j + n\mathbb{Z}$, wobei $\gamma(\alpha) = \zeta^j \alpha$ ist.

Nach den eben Gesagten ist Φ wohldefiniert und injektiv; außerdem ist Φ ein Gruppenhomomorphismus: Seien $\gamma, \gamma' \in \text{Gal}(K'/K)$ mit $\Phi(\gamma) = j+n\mathbb{Z}$, $\Phi(\gamma') = j'+n\mathbb{Z}$. Dann ist

$$(\gamma \circ \gamma')(\alpha) = \gamma(\gamma'(\alpha)) = \gamma(\zeta^{j'}\alpha) = \zeta^{j'}\gamma(\alpha) = \zeta^{j'}\zeta^j\alpha = \zeta^{j+j'}\alpha,$$

also ist $\Phi(\gamma \circ \gamma') = (j+j') + n\mathbb{Z} = \Phi(\gamma) + \Phi(\gamma')$. Es folgt, dass $\text{Gal}(K'/K)$ zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist; das sind aber (bis auf Isomorphie) genau die zyklischen Gruppen mit n teilender Ordnung.

- (2) Sei $\gamma \in \text{Gal}(K'/K)$ ein Erzeuger (also $\text{ord}(\gamma) = n$). $\gamma: K' \rightarrow K'$ ist K -linear; die Eigenwerte müssen n -te Einheitswurzeln sein. Als K -linearer Automorphismus endlicher Ordnung (die nicht durch $\text{char}(K)$ teilbar ist) ist γ diagonalisierbar²; seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K'$ K -linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_n}$. Da $\text{ord}(\gamma) = n$ ist und kein echter Teiler davon, gilt $\langle \zeta^{m_1}, \dots, \zeta^{m_n} \rangle = \langle \zeta \rangle$ (als Untergruppen von K^\times oder K'^\times). Es gibt also ganze Zahlen l_1, \dots, l_n mit $\zeta = (\zeta^{m_1})^{l_1} \dots (\zeta^{m_n})^{l_n}$. Sei $\alpha = \alpha_1^{l_1} \dots \alpha_n^{l_n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \gamma(\alpha_1^{l_1}) \dots \gamma(\alpha_n^{l_n}) = \gamma(\alpha_1)^{l_1} \dots \gamma(\alpha_n)^{l_n} \\ &= (\zeta^{m_1}\alpha_1)^{l_1} \dots (\zeta^{m_n}\alpha_n)^{l_n} = (\zeta^{m_1})^{l_1} \dots (\zeta^{m_n})^{l_n} \cdot \alpha_1^{l_1} \dots \alpha_n^{l_n} = \zeta\alpha. \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten $1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}$ sind. Damit ist $(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1})$ eine K -Basis von K' ; insbesondere ist $K' = K(\alpha)$. Außerdem gilt für $a = \alpha^n$, dass $\gamma(a) = \gamma(\alpha^n) = \gamma(\alpha)^n = (\zeta\alpha)^n = \alpha^n = a$ ist; es folgt $a \in K$. Das zeigt, dass K' der Zerfällungskörper von $X^n - a$ über K ist. \square

Um das auf unser Problem anwenden zu können, müssen wir sicherstellen, dass K „genügend viele“ Einheitswurzeln enthält. Damit das funktioniert, brauchen wir noch etwas mehr Information aus der Galois-Theorie.

16.11. Satz. *Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und seien L_1 und L_2 Zwischenkörper, die endlich und galoissch über K sind. Dann ist auch das Kompositum L_1L_2 über K galoissch, und $\Phi: \text{Gal}(L_1L_2/K) \rightarrow \text{Gal}(L_1/K) \times \text{Gal}(L_2/K)$, $\gamma \mapsto (\gamma|_{L_1}, \gamma|_{L_2})$, ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.*

SATZ
Kompositum
von Galois-
Erweiterungen

Beweis. Nach Satz 12.3 gibt es separable (irreduzible) Polynome $f_1, f_2 \in K[X]$, sodass L_1 und L_2 die Zerfällungskörper von f_1 und f_2 über K sind. Dann ist L_1L_2 der Zerfällungskörper von f_1f_2 , und nach Folgerung 12.7 ist L_1L_2 über K galoissch.

Die Abbildung Φ ist wohldefiniert, da L_1 und L_2 galoissch über K sind; siehe Satz 12.9. Dass Φ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist klar.

Ist $\gamma \in \text{Gal}(L_1L_2/K) \in \ker(\Phi)$, dann folgt $\gamma|_{L_1} = \text{id}_{L_1}$ und $\gamma|_{L_2} = \text{id}_{L_2}$. Weil sich die Elemente von L_1L_2 rational über K durch die Elemente von L_1 und L_2 ausdrücken lassen, folgt $\gamma = \text{id}_{L_1L_2}$. Der Kern von Φ ist also trivial; damit ist Φ injektiv. \square

16.12. Satz. Sei $K \subset K'$ eine Körpererweiterung und seien L_1 und L_2 Zwischenkörper, sodass L_1 endlich und galoissch über K ist. Dann ist L_1L_2 galoissch über L_2 , und $\Phi: \text{Gal}(L_1L_2/L_2) \rightarrow \text{Gal}(L_1/K)$, $\gamma \mapsto \gamma|_{L_1}$, ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Insbesondere ist $\text{Gal}(L_1L_2/L_2)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\text{Gal}(L_1/K)$.

SATZ
Translation
von Galois-
Erweiterungen

Beweis. Nach Satz 12.3 gibt es ein separables (irreduzibles) Polynom $f \in K[X]$, sodass L_1 der Zerfällungskörper von f über K ist. Dann ist L_1L_2 der Zerfällungskörper von f über L_2 , also ist nach Folgerung 12.7 L_1L_2 galoissch über L_2 .

Dass Φ wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist, sieht man wie im Beweis von Satz 16.11. Ist $\gamma \in \text{Gal}(L_1L_2/L_2) \in \ker(\Phi)$, dann folgt $\gamma|_{L_1} = \text{id}_{L_1}$; außerdem ist $\gamma|_{L_2} = \text{id}_{L_2}$ nach Definition von $\text{Gal}(L_1L_2/L_2)$. Wie oben folgt $\gamma = \text{id}_{L_1L_2}$; $\ker(\Phi)$ ist also trivial. \square

Damit können wir schon einmal eine Richtung von Satz 16.2 beweisen:

16.13. Lemma. Sei $\text{char}(K) = 0$ und $K \subset K'$ endlich und galoissch mit auflösbare Galois-Gruppe. Dann ist $K \subset K'$ eine Radikalerweiterung.

LEMMA
auflösbare
Erweiterung
ist Radikal-
erweiterung

Beweis. Sei $G = \text{Gal}(K'/K)$ und sei $\{\text{id}\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$ eine Kette von Untergruppen wie in Definition 16.3. Nach Lemma 16.6 können wir annehmen, dass die Faktorgruppen G_j/G_{j-1} alle zyklisch sind. Sei N das kleinste gemeinsame Vielfache aller ihrer Ordnungen. Sei L der N -te Kreisteilungskörper (hier brauchen wir $\text{char}(K) = 0$ oder wenigstens $\text{char}(K) \nmid N$); dann ist nach Satz 16.12 $K'L$ galoissch über L und die Galois-Gruppe G' ist als Untergruppe von $\text{Gal}(K'/K)$ ebenfalls auflösbar. Sei $\{\text{id}\} = G'_0 \leq G'_1 \leq \dots \leq G'_m = G'$ eine Kette von Untergruppen mit zyklischen Faktorgruppen von N teilender Ordnung und seien $L = L_m \subset L_{m-1} \subset \dots \subset L_1 \subset L_0 = K'L$ die zugehörigen Fixkörper. Nach Satz 12.11 ist L_{j-1} galoissch über L_j mit zyklischer Galois-Gruppe G'_j/G'_{j-1} der Ordnung $n_j \mid N$. Da die N -ten Einheitswurzeln in L vorhanden sind, folgt nach Lemma 16.10, dass es $a_j \in L_j$ gibt, sodass L_{j-1} der Zerfällungskörper von $X^{n_j} - a_j$ über L_j ist. Außerdem ist L der Zerfällungskörper von $X^N - 1$ über K . Wegen $K' \subset K'L$ ist $K \subset K'$ eine Radikalerweiterung. \square

Für die andere Richtung müssen wir noch ein wenig mehr arbeiten.

16.14. Lemma. Ist $K \subset K'$ eine Radikalerweiterung, dann gibt es einen Körperturm wie in Definition 16.1, sodass $K \subset K_m$ eine Galois-Erweiterung ist.

LEMMA
Radikal-
erweiterung
in Galois-
Erweiterung

Beweis. Sei $K = \tilde{K}_0 \subset \tilde{K}_1 \subset \tilde{K}_2 \subset \dots \subset \tilde{K}_{\tilde{m}}$ ein Körperturm wie in Definition 16.1 mit $K' \subset \tilde{K}_{\tilde{m}}$. Wir führen den Beweis durch Induktion über \tilde{m} . Im Fall $\tilde{m} = 0$ ist nichts zu zeigen (denn $K' = K$). Sei also $\tilde{m} > 0$. Wir können die Induktionsvoraussetzung auf $\tilde{K}_{\tilde{m}-1}$ anwenden: Es gibt einen Körperturm $K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{m'}$ wie in Definition 16.1 mit $\tilde{K}_{\tilde{m}-1} \subset K_{m'}$ und sodass $K \subset K_{m'}$ galoissch ist. Sei $\tilde{K}_{\tilde{m}}$ der Zerfällungskörper von $X^n - a$ über $\tilde{K}_{\tilde{m}-1}$ (mit $a \in \tilde{K}_{\tilde{m}-1}$). Dann ist $a \in K_{m'}$; sei $\{a_1 = a, a_2, a_3, \dots, a_l\}$ die Bahn von a unter $\text{Gal}(K_{m'}/K)$. Dann ist $f = (X^n - a_1)(X^n - a_2) \dots (X^n - a_l) \in K[X]$, denn die Koeffizienten von f sind unter $\text{Gal}(K_{m'}/K)$ invariant, da die Faktoren nur

²Das Minimalpolynom (im Sinne der linearen Algebra) von γ teilt $X^n - 1$; dieses Polynom hat nur einfache Nullstellen.

permutiert werden. Sei L' der Zerfällungskörper von f über K ; dann ist $K \subset L'$ galoissch. Sei weiter $L = K_{m'}L'$ das Kompositum von $K_{m'}$ und L' . Nach Satz 16.11 ist $K \subset L$ galoissch. Außerdem ist L auch der Zerfällungskörper von f über $K_{m'}$, enthält also $\tilde{K}_{\tilde{m}}$ als Zerfällungskörper von $X^n - a_1$ über $\tilde{K}_{\tilde{m}-1} \subset K_{m'}$. Nun haben wir einen Körperturm

$$K_{m'} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_l = L,$$

wobei L_j der Zerfällungskörper von $X^n - a_j$ über L_{j-1} ist. Wir setzen jetzt für $m' \leq j \leq m := m' + l$ noch $K_j = L_{j-m'}$; dann ist

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{m'} \subset \dots \subset K_m = L$$

ein Körperturm wie in Definition 16.1 mit $K \subset L$ galoissch und $K' \subset \tilde{K}_{\tilde{m}} \subset L$. \square

Das folgende Lemma ergibt den letzten fehlenden Schritt im Beweis von Satz 16.2:

16.15. Lemma. *Ist $K \subset K'$ eine galoissche Radikalerweiterung, dann ist ihre Galois-Gruppe $\text{Gal}(K'/K)$ auflösbar.*

LEMMA
Radikal-
erweiterung
auflösbar

Beweis. Sei $K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m$ ein Körperturm wie in Definition 16.1 mit $K' \subset K_m$. Nach Lemma 16.14 können wir annehmen, dass $K \subset K_m$ ebenfalls galoissch ist. Es genügt dann zu zeigen, dass $\text{Gal}(K_m/K)$ auflösbar ist, denn $\text{Gal}(K'/K)$ ist eine Faktorgruppe von $\text{Gal}(K_m/K)$, also nach Lemma 16.5 dann ebenfalls auflösbar.

Der Beweis geht durch Induktion über m . Der Fall $m = 0$ ist klar (die triviale Gruppe ist auflösbar). Sei also $m > 0$. Dann ist K_1 der Zerfällungskörper eines Polynoms $X^n - a \in K[X]$ (mit $\text{char}(K) \nmid n$) und damit eine Galois-Erweiterung von K . Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die galoissche Radikalerweiterung $K_1 \subset K_m$, ist die Untergruppe $\text{Gal}(K_m/K_1)$ von $\text{Gal}(K_m/K)$ auflösbar. Nach Lemma 16.5 genügt es also zu zeigen, dass auch die Faktorgruppe $\text{Gal}(K_1/K)$ auflösbar ist. Dazu beachten wir, dass K_1 den n -ten Kreisteilungskörper \tilde{K} über K enthält (denn eine primitive n -te Einheitswurzel ergibt sich als Quotient geeigneter Nullstellen von $X^n - a$). Wir haben also den Turm $K \subset \tilde{K} \subset K_1$. Nach Satz 13.2 ist $K \subset \tilde{K}$ galoissch mit abelscher Galois-Gruppe, und nach Lemma 16.10 ist $\tilde{K} \subset K_1$ galoissch mit abelscher (sogar zyklischer) Galois-Gruppe; insgesamt folgt, dass $\text{Gal}(K_1/K)$ auflösbar ist (mit der Kette $\{\text{id}\} \leq \text{Gal}(K_1/\tilde{K}) \leq \text{Gal}(K_1/K)$; beachte, dass $\text{Gal}(K_1/K)/\text{Gal}(K_1/\tilde{K}) \cong \text{Gal}(\tilde{K}/K)$ ist). \square

Der Beweis von Satz 16.2 geht dann so:

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $K \subset K'$ eine Radikalerweiterung. Nach Lemma 16.14 gibt es eine galoissche Radikalerweiterung $K \subset L$ mit $K' \subset L$. Nach Lemma 16.15 ist die Galois-Gruppe von $K \subset L$ auflösbar.

„ \Leftarrow “: Sei $\text{char}(K) = 0$ und $K \subset L$ endlich und galoissch mit auflösbarer Galois-Gruppe, sodass $K' \subset L$ ist. Nach Lemma 16.13 ist $K \subset L$ eine Radikalerweiterung. Dann ist aber $K \subset K'$ ebenfalls eine Radikalerweiterung (man kann denselben Körperturm verwenden wie für $K \subset L$). \square

Daraus ergibt sich unmittelbar:

16.16. Folgerung. Seien K ein Körper mit $\text{char}(K) = 0$ und $f \in K[X]$. Die Nullstellen von f lassen sich genau dann durch Radikalausdrücke über K darstellen, wenn die Galois-Gruppe $\text{Gal}(f/K)$ auflösbar ist.

FOLG
Auflösung
durch
Radikale

16.17. Folgerung. Für jedes $n \geq 5$ gibt es Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n , deren Nullstellen nicht durch Radikalausdrücke darstellbar sind.

FOLG
nicht
auflösbare
Polynome

Beweis. Wir konstruieren ein Polynom f mit $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = S_5$. Da S_5 nicht auflösbar ist, sind die Nullstellen von f nicht durch Radikalausdrücke darstellbar. Für beliebiges $n \geq 5$ betrachten wir ein Polynom der Form fg mit $g \in \mathbb{Q}[X]$ normiert vom Grad $n - 5$. Die Konstruktion von f wird durch das folgende Lemma erledigt. \square

16.18. Lemma. Sei p eine ungerade Primzahl.

LEMMA
 $\text{Gal}(f/\mathbb{Q})$
 $= S_p$

- (1) Ist G eine Untergruppe von S_p , sodass G ein Element der Ordnung p und eine Transposition enthält, dann ist $G = S_p$.
- (2) Ist $f \in \mathbb{Q}[X]$ normiert vom Grad p und irreduzibel, sodass f genau $p - 2$ reelle und ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen hat, dann hat f Galois-Gruppe $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) = S_p$.
- (3) Polynome wie in Teil (2) existieren.

Beweis.

- (1) Das ist die Aussage von Satz 1.10 (3).
- (2) Sei $G = \text{Gal}(f/\mathbb{Q})$. Da f irreduzibel ist, ist p ein Teiler von $\#G$ (Lemma 14.2), also enthält G ein Element der Ordnung p (1. Satz von Sylow 3.2 oder Satz von Cauchy 2.14). Sei $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f . Die komplexe Konjugation induziert durch Einschränkung auf K ein Element von G , das die beiden konjugiert komplexen Nullstellen von f vertauscht und die übrigen Nullstellen fest lässt; dieses Element entspricht also einer Transposition. Nach Teil (1) folgt $G = S_p$.
- (3) Wir betrachten zunächst das folgende Polynom vom Grad p :

$$\begin{aligned} h &= X(X^2 - 2)(X^2 - 4) \cdots (X^2 - (p - 3))(X^2 + 2p^2) \\ &= X(X^2 + 2p^2) \prod_{j=1}^{(p-3)/2} (X^2 - 2j) \\ &= X^p + \left(2p^2 - \frac{(p-1)(p-3)}{4}\right)X^{p-2} + \dots \in \mathbb{Q}[X]. \end{aligned}$$

Es hat offensichtlich genau $p - 2$ reelle Nullstellen. Seine $(p - 2)$ -te Ableitung ist

$$h^{(p-2)} = \frac{p!}{2}X^2 + (p - 2)! \left(2p^2 - \frac{(p-1)(p-3)}{4}\right)$$

und damit ohne reelle Nullstelle (da der konstante Term positiv ist). Außerdem gilt für ungerade Zahlen $1 \leq 2m + 1 \leq p - 2$, dass

$$h(\pm\sqrt{2m+1}) = \pm\sqrt{2m+1}(2m+1+2p^2) \prod_{j=1}^{(p-3)/2} (2(m-j)+1)$$

Betrag $\geq 2p^2$ hat. Da h nur einfache reelle Nullstellen hat, und zwar an den Stellen $-\sqrt{p-3}, \dots, -\sqrt{4}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{p-3}$, müssen die Vorzeichen an den $p-1$ Stellen

$$-\sqrt{p-2}, \dots, -\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{p-2}$$

alternieren. Wir setzen jetzt $f = h + 2$. Das Polynom h ist ungerade und $h \equiv X^p \pmod{2}$. Es folgt $f \equiv X^p \pmod{2}$ und $f(0) = 2$; damit ist f irreduzibel nach dem Eisenstein-Kriterium. Da $2 < 2p^2$ ist, hat f an den $p-1$ oben angegebenen Stellen dasselbe Vorzeichen wie h ; nach dem Zwischenwertsatz hat f also mindestens $p-2$ reelle Nullstellen. Auf der anderen Seite kann f nicht mehr als $p-2$ reelle Nullstellen haben, denn sonst hätte die $(p-2)$ -te Ableitung von f zwei reelle Nullstellen (Induktion mit dem Satz von Rolle), was wegen $f^{(p-2)} = h^{(p-2)}$ nicht stimmt. \square

Für $p = 5$ kann man z.B. auch $f = X^5 - 6X + 1$ nehmen (denn f ist irreduzibel mod 5 und hat genau drei reelle Nullstellen: ≥ 3 mit Zwischenwertsatz, ≤ 3 , da $f' = 5X^4 - 6$ nur zwei reelle Nullstellen hat).

Man kann für jedes n (nicht nur für Primzahlen) Polynome über \mathbb{Q} konstruieren, deren Galois-Gruppe S_n (oder auch A_n) ist. Die weitergehende Frage, ob *jede* endliche Gruppe (bis auf Isomorphie) als Galois-Gruppe eines Polynoms über \mathbb{Q} auftritt, das sogenannte *Umkehrproblem der Galois-Theorie*, ist jedoch offen.

Auf der anderen Seite ist leicht einzusehen, dass jede endliche Gruppe als Galois-Gruppe irgendeiner Galois-Erweiterung auftritt: Sei G eine endliche Gruppe mit $\#G = n$, dann ist G isomorph zu einer Untergruppe der S_n (betrachte die Operation von G auf sich selbst durch Translation). Ist $p > n$ eine Primzahl, dann ist S_n isomorph zu einer Untergruppe von S_p (die aus den Permutationen besteht, die gewisse $p-n$ Elemente fest lassen). Sei $\mathbb{Q} \subset K$ eine Galois-Erweiterung mit $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_p$ und sei $k = \mathcal{F}(G)$ der Fixkörper von G (als Untergruppe von S_p betrachtet). Dann ist nach dem Satz 12.11 über die Galois-Korrespondenz $k \subset K$ galoissch mit $\text{Gal}(K/k) \cong G$.

Wenn man sich bei der Definition von Radikalerweiterungen auf die Adjunktion von *Quadratwurzeln* (statt beliebiger n -ter Wurzeln) beschränkt, dann erhält man genau die (mit Zirkel und Lineal) *konstruierbaren* Elemente; siehe Abschnitt 9. Mit im Wesentlichen dem gleichen Beweis (sogar einfacher, weil die zweiten Einheitswurzeln ± 1 in jedem Körper der Charakteristik 0 schon vorhanden sind) erhält man dafür die folgende Aussage:

16.19. Satz. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper und sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

- (1) α ist ausgehend von den Elementen von K mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
- (2) Es gibt eine Galois-Erweiterung $K \subset K'$ mit $K' \subset \mathbb{C}$ und $\alpha \in K'$, sodass $\#\text{Gal}(K'/K) = 2^n$ ist für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
- (3) α ist algebraisch über K und für das Minimalpolynom $f \in K[X]$ von α über K gilt $\#\text{Gal}(f/K) = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

SATZ
Charakterisierung von
Konstruierbarkeit

Der Beweis liefert zunächst, dass die Galois-Gruppe auflösbar sein muss (mit sukzessiven Faktorgruppen $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, was bedeutet, dass die Gruppenordnung eine Potenz von 2 sein muss). Der Schritt, der im Beweis noch fehlt, ist folgende Aussage (für $p = 2$):

16.20. Satz. Sei p eine Primzahl und G eine endliche p -Gruppe, d.h., $\#G = p^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann ist G auflösbar. Genauer gilt: Es gibt eine Kette

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_n = G$$

von Untergruppen mit $G_{j-1} \triangleleft G_j$ und $G_j/G_{j-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für alle $1 \leq j \leq n$.

SATZ
 p -Gruppen
sind
auflösbar

Beweis. Wir erinnern uns daran, dass das *Zentrum* einer Gruppe G definiert war als

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall g' \in G: gg' = g'g\}.$$

Daraus folgt sofort, dass jede Untergruppe von $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist. Nach Folgerung 2.17 ist das Zentrum einer p -Gruppe stets nichttrivial. Insbesondere hat eine p -Gruppe stets einen (dann zyklischen) Normalteiler der Ordnung p (1. Satz von Sylow 3.2 oder Struktursatz über endliche abelsche Gruppen, angewandt auf das Zentrum).

Der Beweis erfolgt nun durch Induktion über n . Im Fall $n = 0$ ist G trivial, und es ist nichts zu zeigen. Sei also $n > 0$. Nach obiger Überlegung hat G einen Normalteiler G_1 mit $\#G_1 = p$. Sei $G' = G/G_1$, dann ist $\#G' = p^{n-1}$; nach Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Kette

$$\{1_{G'}\} = G'_0 \leq G'_1 \leq \dots \leq G'_{n-1} = G'$$

von Untergruppen von G' mit $G'_{j-1} \triangleleft G'_j$ und $G'_j/G'_{j-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $1 \leq j \leq n-1$. Sei $\phi: G \rightarrow G'$ der kanonische Epimorphismus. Wir setzen $G_j = \phi^{-1}(G'_{j-1})$ für $1 \leq j \leq n$ (für $j = 1$ erhalten wir dieselbe Gruppe G_1 wie oben) und $G_0 = \{1_G\}$, dann gilt $G_j/G_{j-1} \cong G'_{j-1}/G'_{j-2} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für $2 \leq j \leq n$ und $G_1/G_0 \cong G_1 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. \square

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch mit Minimalpolynom f über \mathbb{Q} vom Grad n . Die Bedingung „ n ist Zweierpotenz“ ist *notwendig* für die Konstruierbarkeit von α (denn da f irreduzibel ist, gilt $n \mid \#\text{Gal}(f/\mathbb{Q})$) — das haben wir für verschiedene Unmöglichkeitbeweise benutzt — aber *nicht hinreichend*. Wir haben gesehen, dass es irreduzible Polynome f vom Grad 4 über \mathbb{Q} gibt mit $\text{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong S_4$ oder A_4 , aber $\#S_4 = 24$ und $\#A_4 = 12$ sind keine Zweierpotenzen.

LITERATUR

- [Fi] GERD FISCHER: *Lehrbuch der Algebra*, Vieweg, 2008. Signatur 80/SK 200 F529 L5. Online-Zugriff unter <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9455-7>
- Ein Standard-Lehrbuch. Das Buch folgt dem üblichen Aufbau Gruppen-Ringe-Körper.
- [KM] CHRISTIAN KARPFFINGER und KURT MEYBERG: *Algebra. Gruppen - Ringe - Körper*, Spektrum Akademischer Verlag, 2010. Online-Zugriff unter <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8274-2601-7>.
- Das Buch folgt dem üblichen Aufbau Gruppen-Ringe-Körper.