ALGORITHMISCHER BEWEIS KOMBINATORISCHER IDENTITÄTEN

MICHAEL STOLL

1. Das Problem

In diesem Vortrag geht es um *Identitäten*. Was ist eine Identität? Das ist eine Aussage, die zwei Dinge gleich setzt, in den meisten Fällen ein kompliziertes Ding mit einem einfachen Ding. Ein Beispiel ist

$$6 \cdot 9 = 42\,.$$

Links vom Gleichheitszeichen steht etwas Kompliziertes, nämlich ein Produkt, während rechts etwas Einfaches steht, nämlich eine Zahl. Sie haben natürlich sofort gesehen, daß diese Identität *falsch* ist (es wird die einzige falsche Identität in diesem Vortrag bleiben). Warum konnten Sie das sofort sehen? Weil Sie (wie wir alle) in der Grundschule einen Algorithmus gelernt haben, mit dem sich komplizierte Ausdrücke wie auf der linken Seite in einfache eindeutige *Normalformen* umwandeln lassen. Die Normalform der linken Seite ist 54 und damit von der rechten Seite (die bereits in Normalform ist) verschieden.

Andere Arten von Identitäten, die sich routinemäßig entscheiden lassen, werden zum Beispiel repräsentiert von

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) &= x^3+y^3+z^3-3xyz \\ \frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi} &= \sin 2\varphi \\ \int_0^t \sqrt{\frac{x}{1-x}} &= \arcsin\sqrt{t} - \sqrt{t(1-t)}\,.\end{aligned}$$

Es ist eine andere Sache, zu gegebener linker Seite eine einfache rechte Seite zu finden. Im ersten der obigen drei Beispiele gibt es noch Normalformen (die rechte Seite ist ein Beispiel dafür). Auch für trigonometrische Ausdrücke wie im zweiten Beispiel lassen sich noch Normalformen finden (das ist nicht mehr ganz so offensichtlich). Das dritte Beispiel führt auf die Frage, wann sich das unbestimmte Integral einer „elementaren“ Funktion wieder als elementare Funktion schreiben läßt. Dieses Problem hat eine algorithmische Lösung (Risch 1970), die inzwischen

Date: 29. Juni 1999.

in Systeme wie Maple oder Mathematica eingebaut ist. Wir alle haben uns daran gewöhnt, unsere Integrale von solch einem System ausrechnen zu lassen.

Die Identitäten, um die es hier geht, sind in gewisser Weise diskrete Analoga zu der Integral-Identität oben (eigentlich eher zu bestimmten Integralen mit Parametern). Wir wollen folgende drei Probleme betrachten.

(1) Gilt $\sum_k F(n,k) = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Zum Beispiel:

$$\sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

(2) Gilt $\sum_k F(n,k) = \sum_k G(n,k)$ für alle $n \in \mathbb{N}$? Zum Beispiel:

$$\sum_k \binom{n}{k}^3 = \sum_k \binom{n}{k}^2 \binom{2k}{n}$$

(3) Läßt sich $\sum_k F(n,k)$ in „geschlossener Form" hinschreiben? Zum Beispiel:

$$\sum_k (-1)^k \frac{(4n+k)!(4n-k)!}{(n+k)!^4(n-k)!^4} = ?$$

Die Summe erstreckt sich dabei über alle ganzen Zahlen, wenn keine Einschränkungen angegeben sind. Wir müssen natürlich präzisieren, welche Art von Funktionen F, G, f wir betrachten wollen.

Definition. L sei ein Körper der Charakteristik 0.

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow L$ heißt *hypergeometrisch*, wenn sie eine Gleichung

$$p_0(n)f(n) = p_1(n)f(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

erfüllt mit Polynomen $p_0, p_1 \in L[X]$, die nicht beide null sind.

Typische Beispiele sind

$$f(n) = n!\,, \qquad \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \qquad \frac{1}{x}\binom{x+n}{n}^{-1}$$

(letzteres mit $L = \mathbb{Q}(x)$), hingegen ist zum Beispiel

$$f(n) = n^n$$

nicht hypergeometrisch.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow L$ heißt in (hypergeometrischer) *geschlossener Form* darstellbar, wenn sie eine endliche Summe von hypergeometrischen Funktionen ist.

Zum Beispiel haben die Fibonacci-Zahlen über $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ die geschlossene Form

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(c) Eine Funktion $F : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \longrightarrow L$ heißt *einfach hypergeometrisch*, falls sie sich schreiben läßt als

$$F(n,k) = P(n,k) x^k y^n \prod_{i=1}^{m} (a_i n + b_i k + c_i)!^{e_i} \,,$$

wobei $P \in L[X,Y]$, $a_i, b_i, e_i \in \mathbb{Z}$ und $x, y, c_i \in L$. (Die Interpretation der Fakultät ist ein bißchen problematisch, wenn c_i keine ganze Zahl ist. Wir können uns statt dessen $(a_i n + b_i k + c_i)!/c_i!$ vorstellen, was eine rationale Funktion von c_i ist.)

Typische Beispiele sind

$$F(n,k) = (-1)^k \binom{2n}{k}^3, \quad (3k-2n)\binom{n}{k}^2\binom{2k}{k}.$$

Wenn wir für unsere Probleme spezifizieren, daß F und G einfach hypergeometrisch und f hypergeometrisch sein sollen, dann haben wir eine präzise gestellte Aufgabe vor uns (in Problem (3) ist natürlich der gerade definierte Begriff der geschlossenen Form gemeint).

2. Die Theorie

Wie können wir eine Identität wie

$$\sum_k F(n,k) = \sum_k \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} = f(n)$$

beweisen? Die rechte Seite f ist hypergeometrisch; im Beispiel gilt

$$2(2n+1)f(n) - (n+1)f(n+1) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wenn wir also zeigen können, daß die linke Seite ebenfalls diese Rekursionsgleichung erfüllt, dann sind wir fertig, denn $\sum_k F(0,k) = 1 = f(0)$, und durch die Rekursion sind alle anderen Werte eindeutig bestimmt.

Nun können wir sicher nicht erwarten, daß jeder Ausdruck der Form $\sum_k F(n,k)$ einer hypergeometrischen Rekursion genügt (sonst wären ja alle diese Summen in geschlossener Form ausdrückbar), aber wir können hoffen, daß $f(n) = \sum_k F(n,k)$ einer allgemeineren Gleichung

$$p_0(n)f(n) + p_1(n)f(n+1) + p_2(n)f(n+2) + \cdots + p_d(n)f(n+d) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ genügt, wobei die $p_i \in L[X]$ sind und $p_d \neq 0$ ist. Solche Funktionen nennt man *P-rekursiv* (von „polynomial linear rekursiv"). In diesem zweiten Teil werden wir zeigen, daß dem wirklich so ist.

Dazu ist es nötig, den Begriff der P-Rekursivität in geeigneter Weise auf Funktionen in mehreren Variablen auszudehnen. Eine naive Verallgemeinerung führt zu Problemen. Schließlich hat sich herausgestellt, daß die weiter unten folgende Definition sinnvoll ist.

Bevor wir diese Definition formulieren können, müssen wir einige Objekte einführen.

Definition. Sei $r \geq 1$ eine ganze Zahl.

(a) Die nicht-kommutative L-Algebra $L\langle n_1, \dots, n_r, N_1, \dots, N_r\rangle$, die von den Variablen $n_1, \dots, n_r$, $N_1, \dots, N_r$ mit den Vertauschungsrelationen
$$n_i n_j = n_j n_i\,, \quad N_i N_j = N_j N_i\,, \quad N_i n_j = (n_j + \delta_{ij}) N_i$$
erzeugt wird, heißt $\mathcal{A}_r(L)$ oder einfach $\mathcal{A}_r$.

(b) Für $m \geq 0$ sei $\mathcal{A}_r^{\leq m} = \mathcal{A}_r^{\leq m}(L)$ der L-Unterraum von $\mathcal{A}_r$, der von allen Monomen $n_1^{e_1} \dots n_r^{e_r} N_1^{e_{r+1}} \dots N_r^{e_{2r}}$ mit $0 \leq e_j \leq m$ für alle $1 \leq j \leq 2r$ erzeugt wird. (Aus den Vertauschungsrelationen folgt, daß $\mathcal{A}_r^{\leq m}\mathcal{A}_r^{\leq n} \subset \mathcal{A}_r^{\leq m+n}$ ist; wir haben also eine Filtrierung auf $\mathcal{A}_r$ definiert.)

Sei nun $D = D_1 \times \cdots \times D_r$ mit $D_j = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ und $\mathcal{S}_D = \mathcal{S}_D(L)$ der Raum aller Funktionen $F : D \longrightarrow L$. Dieser Raum $\mathcal{S}_D$ wird ein $\mathcal{A}_r$-Modul, indem wir setzen
$$\begin{aligned}(n_j \cdot F)(\nu_1, \dots, \nu_r) &= \nu_j F(\nu_1, \dots, \nu_r)\\ (N_j \cdot F)(\nu_1, \dots, \nu_r) &= F(\nu_1, \dots, \nu_{j-1}, \nu_j + 1, \nu_{j+1}, \dots, \nu_r)\,.\end{aligned}$$

Jetzt können wir endlich die angekündigte Definition formulieren.

Lemma und Definition. Für $F \in \mathcal{S}_D$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Es gibt $C \geq 0$, so daß für alle $m \geq 1$ gilt:
$$\dim_L \mathcal{A}_r^{\leq m}(L) \cdot F \leq C\, m^r\,.$$

(ii) Für jede $(r+1)$-elementige Teilmenge $X \subset \{n_1, \dots, n_r, N_1, \dots, N_r\}$ gibt es $0 \neq P_X \in L\langle X\rangle \subset \mathcal{A}_r(L)$ mit $P_X \cdot F = 0$.

Eine Funktion $F \in \mathcal{S}_D$, die diese Eigenschaften hat, heißt *holonom*. Die Menge der holonomen Funktionen in $\mathcal{S}_D$ sei mit $\mathcal{H}_D$ bezeichnet.

Wir wollen den Beweis wenigstens andeuten. Aus (i) folgt (ii), denn
$$\dim(\mathcal{A}_r^{\leq m}(L) \cap L\langle X\rangle) = (m+1)^{r+1} > Cm^r \geq \dim \mathcal{A}_r^{\leq m}(L) \cdot F$$
für m groß genug, also hat die Abbildung
$$\mathcal{A}_r^{\leq m}(L) \cap L\langle X\rangle \longrightarrow \mathcal{A}_r^{\leq m}(L) \cdot F\,, \quad P \longmapsto P \cdot F$$
nichttrivialen Kern. Umgekehrt sei μ so gewählt, daß alle P_X aus Eigenschaft (ii) in $\mathcal{A}_r^{\leq \mu}(L)$ liegen. Dann kann man die Relationen P_X dazu verwenden, hohe Potenzen zu eliminieren, so daß
$$\mathcal{A}_r(L) \cdot F \subset V_\mu \cdot F\,,$$
wobei V_μ der von allen Monomen $n_1^{e_1} \dots n_r^{e_r} N_1^{e_{r+1}} \dots N_r^{e_{2r}}$ erzeugt wird, so daß $e_j \geq \mu$ nur für höchstens r Elemente $j \in \{1, \dots, 2r\}$. Da $\dim(V_\mu \cap \mathcal{A}_r^{\leq m}(L)) \leq Cm^r$ für geeignetes C, folgt Eigenschaft (i).

Die Menge $\mathcal{H}_{\mathbb{N}}$ besteht also gerade aus den P-rekursiven Funktionen. Es gilt, daß $F \in \mathcal{S}_D$ genau dann holonom ist, wenn die triviale Fortsetzung $\tilde{F} \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}^r}$ holonom ist.

Aus den Eigenschaften (i) und (ii) oben lassen sich nun relativ leicht die folgenden Abgeschlossenheitsaussagen über holonome Funktionen gewinnen.

Satz.

(a) $\mathcal{H}_D$ ist ein $\mathcal{A}_r$-Untermodul von $\mathcal{S}_D$.
(b) Mit $F, G \in \mathcal{H}_D$ ist auch das punktweise Produkt $FG \in \mathcal{H}_D$.
(c) Ist $T : \mathbb{Z}^r \longrightarrow \mathbb{Z}^s$ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung, so folgt aus $F \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}^s}$, daß $F \circ T \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}^r}$ ist.
(d) Hat $F \in \mathcal{H}_{D\times\mathbb{Z}}$ in der letzten Variablen endlichen Träger (d.h. für alle $\nu \in D$ hat $\nu_{r+1} \mapsto F(\nu, \nu_{r+1})$ endlichen Träger), so ist $\Sigma F \in \mathcal{H}_D$, wobei $(\Sigma F)(\nu) = \sum_{\nu_{r+1}} F(\nu, \nu_{r+1})$.

Da $n!^e$ und $((n+c)!/c!)^e$ P-rekursiv sind, folgt daraus die erstrebte

Folgerung. Ist $F \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ einfach hypergeometrisch mit endlichem Träger in der zweiten Variablen, so ist $f(n) = \sum_k F(n,k)$ P-rekursiv.

Diese Aussage geht zurück auf Arbeiten in den vierziger Jahren der US-Amerikanischen Nonne Sister Mary Celine Fasenmyer, die mit dieser Methode Rekursionen für Polynome wie etwa die Laguerre-Polynome

$$L_n(x) = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}$$

herleitete. Wieder ausgegraben und (nach einem ersten gescheiterten Anlauf) verallgemeinert wurde die Methode in den achtziger Jahren von Doron Zeilberger.

3. Die Praxis

Nun wissen wir also, daß unsere Summe $f(n) = \sum_k F(n,k)$ P-rekursiv ist. Um damit etwas anfangen zu können, müssen wir aber in der Lage sein, explizit eine Rekursionsgleichung für f zu finden.

Der erste Ansatz wäre, Sister Celines Methode zu folgen. Eigenschaft (ii) sagt uns, daß es einen Operator $P_{n,N,K} \neq 0$ (wir setzen der Einfachheit halber $n_1 = n, n_2 = k$ und $N_1 = N, N_2 = K$) gibt mit $P_{n,N,K} \cdot F = 0$. Da F einfach hypergeometrisch ist, sind alle $F(n+i, k+j)/F(n,k)$ rationale Funktionen von n und k. Man kann also ein $P_{n,N,K}$ von einem gewissen Grad in N und K mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und wird auf ein lineares Gleichungssystem über $L[n]$ geführt, das nach unserer Theorie für hinreichend hohen Grad lösbar sein muß. Zum Beispiel findet man für $F(n,k) = \binom{n}{k}^2$ die Gleichung

$$\begin{aligned}&(n+1)\,(F(n,k) - 2F(n,k+1) + F(n,k+2)) \\ &\quad - (2n+3)\,(F(n+1,k+1) + F(n+1,k+2)) + (n+2)F(n+2,k+2) = 0\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, oder etwas kürzer

$$\big((n+1)(1-2K+K^2) - (2n+3)(K+K^2)N + (n+2)K^2N^2\big) \cdot F = 0\,.$$

Wenn wir diese Gleichung über alle $k \in \mathbb{Z}$ summieren, erhalten wir

$$-2(2n+3)f(n+1) + (n+2)f(n+2) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

woraus mit den Anfangswerten $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ sehr schnell folgt, daß $f(n) = \binom{2n}{n}$ ist.

Diese Methode funktioniert, ist aber sehr langsam, da man im allgemeinen recht große Gleichungssysteme über $L[n]$ lösen muß. Hier hatte nun Zeilberger einen großen Einfall: Wir können den Operator $P_{n,N,K}$, den wir eben gefunden haben, schreiben als

$$P_{n,N,K} = P - (K-1)Q$$

mit

$$\begin{aligned} P &= -2(2n+3)N + (n+2)N^2 \quad \text{und} \\ Q &= -(n+1)(K-1) + (2n+3)(K+2)N - (n+2)(K+1)N^2\,. \end{aligned}$$

Also gilt, wenn wir $G = Q \cdot F$ setzen,

$$P \cdot F = (K-1) \cdot G$$

d.h. ausgeschrieben

$$-2(2n+3)F(n+1,k) + (n+2)F(n+2,k) = G(n,k+1) - G(n,k)\,.$$

Wenn wir diese Gleichung über k summieren, erhalten wir sofort

$$-2(2n+3)f(n+1) + (n+2)f(n+2) = 0\,,$$

da die rechte Seite eine Teleskopsumme liefert (G hat wie F endlichen Träger in k).

Wenn wir beachten, daß $G(n,k) = R(n,k)F(n,k)$ ist mit einer rationalen Funktion R (das kommt daher, daß F einfach hypergeometrisch ist), dann können wir uns also alternativ die folgende Aufgabe stellen:

Gegeben F, finde $P \in L\langle n, N\rangle$ und $R \in L(n,k)$, so daß $P \cdot F = (K-1) \cdot G$ mit $G = RF$ ist!

Bevor wir diese Aufgabe allgemein lösen, betrachten wir einen Spezialfall. Wir nehmen an, $P = 1$. Dann kommt n gar nicht mehr explizit vor, und wir können das Problem formulieren als:

Gegeben $f : \mathbb{N} \longrightarrow L$ hypergeometrisch, finde $g : \mathbb{N} \longrightarrow L$ hypergeometrisch mit $g(k+1) - g(k) = f(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, falls ein solches g existiert!

Gosper hat 1977 einen Algorithmus gefunden, der diese Aufgabe löst. Es ist leicht zu sehen, daß $g(k) = r(k)f(k)$ sein muß mit einer rationalen Funktion $r(k)$. Die wesentliche Idee Gospers war, das Problem auf eine lineare Gleichung für ein *Polynom* zu reduzieren, dessen Grad man a priori beschränken kann.

Zeilberger hat Gospers Algorithmus erweitert, so daß er die allgemeinere Aufgabe löst. (Man setzt P von einem gewissen Grad in N an; die unbestimmten Koeffizienten $p_j(n)$ treten dann zusammen mit den Koeffizienten des unbekannten Polynoms in Gospers Algorithmus linear in der zu lösenden Gleichung auf.)

In unserem Beispiel $F(n,k) = \binom{n}{k}^2$ liefert uns dieser Algorithmus direkt (und viel schneller) das Resultat

$$P = 2(2n+1) - (n+1)N \quad \text{und} \quad R(n,k) = \frac{k^2(3n-2k+3)}{(n-k+1)^2}\,.$$

Beachten Sie, daß man die Behauptung $P \cdot F = (K-1) \cdot (RF)$ leicht durch eine Routine-Rechnung nachprüfen kann! Wir haben

$$G(n,k) = R(n,k)F(n,k) = \frac{k^2(3n-2k+3)}{(n-k+1)^2}\frac{n!^2}{k!^2(n-k)!^2} = (3n-2k+3)\binom{n}{k-1}^2,$$

also

$$\begin{aligned}
&G(n,k+1) - G(n,k)\\
&\qquad = (3n-2k+1)\binom{n}{k}^2 - (3n-2k+3)\binom{n}{k-1}^2\\
&\qquad = \big((3n-2k+1)(n-k+1)^2 - (3n-2k+3)k^2\big)\,\frac{n!}{k!^2(n-k+1)!^2}\\
&\qquad = \big(2(2n+1)(n-k+1)^2 - (n+1)^3\big)\,\frac{n!}{k!^2(n-k+1)!^2}\\
&\qquad = 2(2n+1)\binom{n}{k}^2 - (n+1)\binom{n+1}{k}^2\\
&\qquad = 2(2n+1)F(n,k) - (n+1)F(n+1,k)\,.
\end{aligned}$$

Das gilt natürlich analog für jedes Resultat, das dieser Algorithmus liefert. Mit anderen Worten: Der Algorithmus *zertifiziert* sein Ergebnis! Man muß dem Computer also nicht blind vertrauen, sondern kann sich leicht selbst von der Richtigkeit des Ergebnisses überzeugen.

Nun haben wir eine vollständige Lösung unseres Problems (1) an der Hand.

1. Wende Zeilbergers Algorithmus auf $F(n,k)$ an. Man erhält P und R wie oben. Falls gewünscht, prüfe das Resultat.
2. Die Summe $\sum_k F(n,k)$ erfüllt die Rekursionsgleichung P. Prüfe nach, daß die rechte Seite $f(n)$ ebenfalls diese Gleichung erfüllt.
3. Prüfe genügend (aber endlich viele) Anfangswerte auf Gleichheit.

Ein Beispiel:

$$\sum_k \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} = \frac{1}{x} \binom{x+n}{n}^{-1} = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} .$$

Hier ist also $F(n,k) = \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{x+k} \in \mathbb{Q}(x)$. Zeilbergers Algorithmus liefert

$$P = (n+1) - (n+x+1)N \quad \text{und} \quad R = \frac{k(x+k)}{(n-k+1)} .$$

Die rechte Seite $f(n)$ erfüllt die Rekursionsgleichung, und $\sum_k F(0,k) = 1/x = f(0)$, also ist die Identität bewiesen.

Das Problem (2) läßt sich ähnlich angehen, indem man den Algorithmus auf beide Seiten der Gleichung anwendet.

Man kann auch gewissermaßen umgekehrt an das Problem (1) herangehen und für P gleich die Rekursion einsetzen, der die rechte Seite genügt. Dann kann man Gospers Algorithmus auf die Funktion $\mathbb{Z} \ni k \mapsto (P \cdot F)(n,k)$ ansetzen (wobei n als Parameter behandelt wird). Wenn man Glück hat, ist der Algorithmus erfolgreich, und man ist schneller am Ziel. In der Praxis hat man offenbar meistens Glück, aber es gibt Fälle, wo diese Methode nicht funktioniert. Der Zeilberger-Algorithmus liefert dann eine Rekursion der Länge ≥ 2. (Im Spezialfall $f(n) = 1$ nennen die Autoren Wilf und Zeilberger den so gefundenen Beweis und sein Zertifikat R ganz bescheiden einen „WZ-Beweis“ und sein „WZ-Zertifikat“.)

Das führt uns zum Problem (3). Wenn wir eine Summe $f(n) = \sum_k F(n,k)$ vor uns haben und sich keine offensichtliche Vermutung über die Form von $f(n)$ anbietet (oft kann man $f(n)$ erraten, aber eben nicht immer), dann können wir in jedem Fall unseren Algorithmus anwenden. Bekommen wir eine Rekursion der Länge 1, dann können wir daraus die geschlossene Form leicht bestimmen.

Zum Beispiel sehen die Anfangswerte

$$1, 486, 3543750, 46003313664, 772679415543750, 15025186795291909236 ,$$

die zu

$$F(n,k) = (-1)^k \frac{(4n+k)!(4n-k)!}{(n+k)!^4(n-k)!^4} ,$$

gehören, eher abschreckend aus. Der Algorithmus gibt uns die Rekursion

$$P = 81(4n+1)(4n+3)(3n+1)^4(3n+2)^4 - 8(2n+1)^5(n+1)^5 N ,$$

woraus man leicht ableitet, daß

$$\sum_k (-1)^k \frac{(4n+k)!(4n-k)!}{(n+k)!^4(n-k)!^4} = \frac{(4n)!(3n)!^4}{(2n)!^6 n!^4} = \binom{4n}{2n}\binom{3n}{n}^4 .$$

Wenn allerdings die Rekursion größere Länge hat, dann stehen wir vor dem Problem, daß wir feststellen müssen, ob diese Gleichung hypergeometrische Lösungen hat. Zum Glück gibt es auch hierfür einen Algorithmus, der von Petkovšek Anfang der neunziger Jahre gefunden wurde, so daß auch dieses Problem vollständig algorithmisch lösbar ist.

Als ein einfaches Beispiel sei

$$f(n) = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{3k}{n} = ?$$

betrachtet. Der Zeilberger-Algorithmus liefert uns

$$9(n+1)f(n) + 3(5n+7)f(n+1) + 2(2n+3)f(n+2) = 0\,,$$

eine Rekursion der Länge zwei. Petkovšeks Algorithmus sagt uns dann, daß $(-3)^n$ diese Rekursion löst (wir haben die Faktorisierung

$$9(n+1) + 3(5n+7)N + 2(2n+3)N^2 = (3(n+1) + 2(2n+3)N)(3+N)$$

in $\mathcal{A}_1$). Da $f(0) = 1$ und $f(1) = -3$, ist tatsächlich $f(n) = (-3)^n$. In diesem Fall hätte man das Ergebnis natürlich auch leicht erraten können.

Anders gelagert ist

$$f(n) = \sum_k \binom{n}{k}^3 = ?\,.$$

Hier bekommen wir

$$8(n+1)^2 f(n) + (7n^2 + 21n + 16)f(n+1) - (n+2)^2 f(n+2) = 0\,,$$

und Petkovšeks Algorithmus sagt uns, daß es keine hypergeometrischen Lösungen dieser Gleichung gibt. $f(n)$ ist also nicht in geschlossener Form darstellbar.

Mathematisches Institut, Universitätsstr. 1, D–40225 Düsseldorf

E-mail address: stoll@math.uni-duesseldorf.de