Universität Bayreuth
Fakultät für Mathematik und Physik

# Diplomarbeit

# Verallgemeinerung der formalen Begriffsanalyse und Anwendung auf mehrwertige Kontexte

eingereicht von: Ralf Gugisch
Leuschnerstr. $1\frac{1}{2}$
95447 Bayreuth

betreut von: Prof. Dr. Adalbert Kerber
Mathematik, Lehrstuhl II
Universität Bayreuth


This document was prepared with LyX and $\LaTeX\,2_\varepsilon$.

# Vorwort

Die formale Begriffsanalyse ist ein recht junges Gebiet der Mathematik, das anfang der achtziger Jahre an der TH Darmstadt entwickelt wurde. Sie wendet das philosophische Verständnis eines Begriffs als Einheit von Begriffsumfang (Gegenstände) und Begriffsinhalt (Merkmale) an, um begriffliche Hierarchien mengentheoretisch zu untersuchen. Zu diesem Thema ist bereits zahlreiche Literatur veröffentlicht worden. So zum Beispiel das erst letztes Jahr veröffentlichte Standardwerk [GaWi96], welches die mathematischen Grundlagen dieser Theorie zusammenträgt. Zu den erfolgsversprechenden Anwendungsgebieten der formalen Begriffsanalyse zählt neben der Datenanalyse vor allem die Wissensaufbereitung (siehe [Boe97]).

Es gibt inzwischen einige Erweiterungen dieser Theorie. Hier ist an erster Stelle die Begriffsanalyse mit Fuzzy-Kontexten zu nennen ([Um94]). Diese wendet die Ideen der Theorie der unscharfen Mengen auf die hier vorliegenden Strukturen an. Aber auch für mehrwertige Kontexte, welche bisher mit Hilfe von Skalierungen analysiert werden, kann man entsprechende Verallgemeinerungen formulieren. Bei dem Versuch, letzteres einzuführen, sind mir große Ähnlichkeiten zur Arbeit von Umbreit aufgefallen. Dies gab mir den Anlaß, die Begriffsanalyse allgemeiner zu formulieren, so daß Fuzzy-Kontexte, mehrwertige Kontexte und auch die klassischen einwertigen Kontexte als Spezialfälle des *Verbandskontextes* aufgefaßt werden können.

Obwohl ich kein spezielles Wissen voraussetze, verzichte ich auf Motivationen und Erläuterungen zur klassischen Darstellung der formalen Begriffsanalyse. Ich möchte hier vielmehr die Vorteile meiner Verallgemeinerungen darstellen. Das Verständnis dieser Arbeit wird also wesentlich vereinfacht, wenn man bereits mit dem Thema vertraut ist. Für eine Einführung, und auch für einen Überblick über die zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten, eignet sich am besten das bereits erwähnte Standardwerk [GaWi96]. Es gibt aber auch im Internet einführende Werke zu diesem Thema, so z.B. [KeLe97].

Im *ersten Kapitel* dieser Arbeit führe ich die nötigen mathematischen Grundlagen ein: Die Begriffsanalyse basiert auf der Theorie der geordneten Mengen und speziell auf der Theorie der vollständigen Verbände. Da diese mathematischen Teilgebiete zu umfassend sind, um sie hier erschöpfend zu behandeln, gebe ich nur die

Begriffe an, die wir benötigen werden. Für eine breitere Einführung in diese Gebiete der Mathematik sei auf entsprechende Literatur verwiesen. Hüllenoperatoren, welche z.B. im Zusammenhang mit Topologien geläufig sind, führe ich allgemein auf geordneten Mengen ein. Etwas genauer gehe ich anschließend auf die *Galoisverbindungen* ein, da diese den Kern der Begriffsanalyse bilden: Eine Galoisverbindung ist ein Paar von entgegengerichteten Abbildungen zwischen zwei geordneten Mengen. Sie sind in der Mathematik weit verbreitet, jedoch oft – mit der dualen Ordnung auf einem der Verbände – unter dem Namen residuierte Abbildungen bekannt. Schließlich benötigen wir für die Fuzzykontexte noch eine grundlegende Einführung in die Theorie der Halbringe.

Die Verallgemeinerung des einwertigen Kontextes – den Ordnungskontext – definiere ich im *zweiten Kapitel* als eine Galoisverbindung zwischen zwei geordneten Mengen. Von größerer Bedeutung ist bisher allerdings der Verbandskontext – eine Galoisverbindung zwischen zwei vollständigen Verbänden. Ableitung und Begriff lassen sich analog zum klassischen Fall einführen, wodurch man den klassischen Kontext dann als Spezialfall des Verbandskontextes auffassen kann, nämlich als Potenzmengenkontext. Ich gebe weiterhin zu jedem Verbandskontext einen klassischen Kontext mit isomorphem Begriffsverband an. Hierbei spielen $\vee$-dichte Teilmengen von $X$ bzw. $Y$ die Rolle der Gegenstände $G$ bzw. der Merkmale $M$. Nun kann man die bereits bekannten Algorithmen für klassische Kontexte auf Verbandskontexte durch „Kapselung“ anwenden: Man berechnet zum verallgemeinerten Kontext den klassischen Kontext, wendet den klassischen Algorithmus an und übersetzt das Ergebnis – falls nötig – zurück auf den ursprünglichen Kontext. Mit Hilfe dieser Strategie kann man den Begriffsverband erzeugen. Schließlich definiere ich noch Teilkontexte, welche eine Möglichkeit bieten, für komplizierte Verbandskontexte übersichtliche Unterverbände des Begriffsverbandes zu erzeugen. Damit kann man bei der Analyse eines Kontextes von vornherein uninteressante Daten ausblenden, bzw. Teilaspekte übersichtlicher darstellen. Im Verlauf dieses Kapitels werde ich immer wieder auf das Standardbeispiel für verallgemeinerte Kontexte zurückgreifen: den Fuzzykontext.

Die bisherigen Ergebnisse wende ich im *dritten Kapitel* auf mehrwertige Kontexte an: Ich definiere den Verband der *Beschreibungen,* so daß dieser mit der Potenzmenge der Gegenstände und einer geeigneten Ableitung einen Verbandskontext bildet. Mit Hilfe des vorherigen Kapitels kann man nun einen einwertigen Kontext mit isomorphem Begriffsverband angeben. Bei einem Vergleich des mehrwertigen Verbandskontextes mit der bisher üblichen Skalierung mehrwertiger Kontexte stellt sich heraus, daß man Skalierungen als Teilkontexte des Verbandskontextes auffassen kann. Kombiniert man die Idee der unscharfen Merkmale von Fuzzykontexten mit mehrwertigen Kontexten, so erhält man unscharfe mehrwertige Kontexte – die sogenannten Fuzzy-wertigen Kontexte. Auch für Fuzzy-wertige Kontexte gebe ich Verfahren an, um klassische Kontexte zu erhalten. Mit diesen kann man anschließend den ursprünglichen Kontext analysieren.

Im *vierten Kapitel* betrachte ich schließlich Implikationen zwischen Merkmalsmengen. Wie auch schon in [GaWi96] festgestellt wurde, besteht hier ein großer Zusammenhang zu den sogenannten funktionalen Abhängigkeiten aus der relationalen Algebra. Noch allgemeiner kann man generell Hüllenoperatoren als Menge von Implikationen darstellen – zum Beispiel im Computer. Damit diese Darstellung möglichst sparsam ist, verwendet man eine Basis einer Implikationenmenge. Hier ist speziell die Duquenne-Guigues-Basis zu nennen, welche für jede Implikationenmenge eindeutig ist. Nachdem ich Implikationen allgemein definiert und analysiert habe, betrachte ich wieder den Verbandskontext. Ich werde aufzeigen, daß eine Implikation in einem Verbandskontext genau dann gilt, wenn sie im zugehörigen klassischen Kontext gilt. Allerdings kann man die Duquenne-Guigues-Basis nicht so einfach aus derjenigen des klassischen Kontextes gewinnen. Also entwickle ich – nun wieder für den allgemeinen Fall von Implikationen zur Darstellung von Hüllenoperatoren – einen effizienten Algorithmus, welcher für gegebenen Hüllenoperator $\gamma$ die Duquenne-Guigues-Basis erzeugt (durch die man anschließend $\gamma$ kompakt darstellen kann). Dieser Algorithmus ist im großen und ganzen bereits in [GaWi96] definiert, und in [Boe97] analysiert worden. Allerdings konnte ich den Aufwand noch verbessern, indem ich die Idee des Linclosure-Algorithmus aus der Theorie der relationalen Algebra mit einbinde.

Bedanken möchte ich mich bei all jenen, die zur Entstehung der Arbeit beigetragen haben. Dabei gilt mein besonderer Dank Herrn Prof. Dr. Adalbert Kerber. Durch seine Zuversichtlichkeit und seine aufmunternden Worte motivierte er mich dazu, die hier vorgestellten Verallgemeinerungen zu formulieren. Zudem zeigte er während der Entstehungsphase dieser Arbeit stets großes Interesse an neuen Entwicklungen und gab mir öfters hilfreiche Ratschläge und sinnvolle Anregungen. Zusätzlich verhalf mir Prof. Dr. Kerber durch sein persönliches Engagement zu wichtigen persönlichen Kontakten. So ermöglicht er mir nun auch im Anschluß an die Diplomarbeit einen zweiwöchigen Forschungsaufenthalt bei Kollegen in Frankreich.

Dank sagen möchte ich auch meinen Eltern, die mir das Studium finanziell ermöglichten und mir den notwendigen Rückhalt gaben.

Bayreuth, 22. Oktober 1997 Ralf Gugisch

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Mathematische Grundlagen

Die formale Begriffsanalyse beruht auf der Theorie der geordneten Mengen, und speziell auf der Theorie der vollständigen Verbände. Deshalb führen wir kurz die für uns wichtigsten Hilfsmittel dieser mathematischen Teilgebiete auf, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen werden. Sind jemandem die entsprechenden Begriffe unvertraut, so verweise ich für eine ausführlichere Behandlung auf die entsprechende Literatur: Das Standardwerk zur Verbandstheorie ist beispielsweise [Bir73], aber auch in [GaWi96] führen die Autoren in einem Kapitel die nötigen mathematischen Grundlagen ein.

## 1.1 Geordnete Mengen

Der grundlegende Begriff der mathematischen Theorie der geordneten Mengen ist die Ordnung. Diese ist definiert als eine spezielle binäre Relation:

**1.1.1. Definition.** Eine *(binäre) Relation* $R$ zwischen zwei Mengen $X$ und $Y$ ist eine Teilmenge von $X \times Y$ . Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir oft auch $xRy$. Mit $R^{-1} \subseteq Y \times X$ bezeichnen wir die zu $R$ *inverse Relation* mit $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$. Ist $Y = X$ (d.h. $R \subseteq X \times X$), so sagen wir auch, $R$ sei eine Relation *auf* $X$.

**1.1.2. Definition.** Eine *Ordnung* $\leq$ auf einer Menge $X$ ist eine binäre Relation auf $X$, für die gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisymmetrie)
3. $x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitivität)

Für $x \leq y$ mit $x \neq y$ schreiben wir auch $x < y$. Weiter heißt eine Menge $X$ mit einer Ordnung $\leq$ auf $X$ *geordnete Menge*$(X, \leq)$.

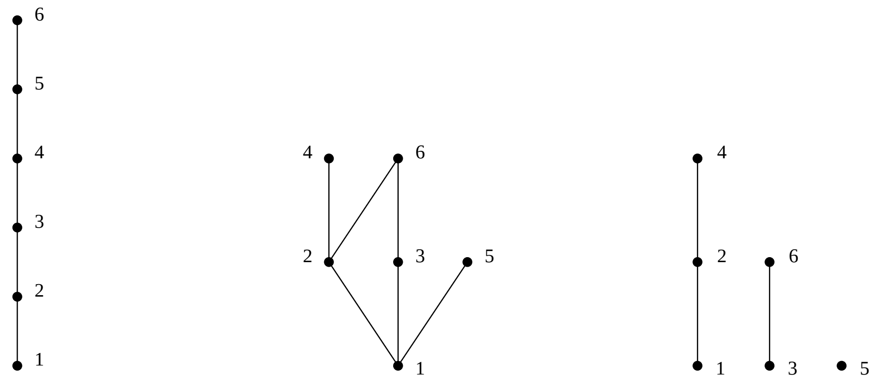



Abbildung 1.1: Hasse-Diagramme der Menge $\{1, \ldots, 6\}$ mit 3 verschiedenen Ordnungen

Ordnungen kommen fast überall in der Mathematik vor und dürften auch jedem geläufig sein. Allerdings sollten wir folgendes betonen: Wir haben nicht gefordert, daß je zwei Elemente vergleichbar sind. Es kann also durchaus ein $x \in X$ und $y \in X$ geben mit $x \not\leq y$ und $y \not\leq x$. Um dies hervorzuheben, nennt man $\leq$ häufig auch *partielle* Ordnung, im Gegensatz zu einer *vollständigen* Ordnung. Ein Beispiel einer partiell geordneten Menge ist die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ mit $n \leq m$ genau dann, wenn $n$ ein Teiler von $m$ ist.

**1.1.3. Definition.** Sei $(X, \leq)$ geordnete Menge. Dann heißt ein $a \in X$ *unterer Nachbar* von $b \in X$, falls $a < b$ ist, und falls weiter aus $a \leq c < b$ bereits $a = c$ folgt. Umgekehrt heißt dann auch $b$ *oberer Nachbar* von $a$.

Eine endliche, geordnete Menge kann durch ein sogenanntes *Hasse-Diagramm* dargestellt werden. Dies ist ein gerichteter Graph ohne Zykel, in dem jeder Knoten ein Element der Menge darstellt. Eine aufsteigende Kante (Richtung) zwischen zwei Elementen $x_1$ und $x_2$ bedeutet, daß $x_1$ unterer Nachbar von $x_2$ ist. Also gilt $x_1 < x_2$ genau dann, wenn es eine Folge aufsteigender Linien von $x_1$ nach $x_2$ gibt.

**1.1.4. Beispiel.** In Abbildung 1.1 sind Hasse-Diagramme der Menge $\{1, \ldots, 6\}$ mit drei verschiedenen Ordnungen abgebildet: Das erste Diagramm zeigt die übliche vollständige Ordnung $\leq$, im zweiten ist die Teilbarkeitsordnung $|$ abgebildet, und in der dritten Zeichnung sehen wir eine Ordnung, die wie folgt definiert ist:

$$x \leq y :\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}_0 : y = 2^p x.$$

(Daß dies alles Ordnungen sind, rechnet man leicht nach.)

Eine interessante Frage ist nun, wann man zwei geordnete Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ als gleichartig, d.h. als isomorph bezeichnen kann. Hierzu betrachten wir Abbildungen zwischen geordneten Mengen. Aus der Existenz einer Funktion

$\varphi : X \to Y$, für welche die Inklusion $x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ gilt, folgt noch nicht die erwünschte Gleichartigkeit der Ordnungen: Vergleichen wir nämlich in $X = \{1, \ldots, 6\}$ die übliche Ordnung mit der Teilbarkeitsordnung, so haben die geordneten Mengen relativ wenig gemeinsam (siehe Abbildung 1.1). Aber für die Idendität id: $(X, |) \to (X, \leq)$ gilt: $x \,|\, y \Rightarrow x \leq y$. Um der intuitiven Auffassung gleichartig geordneter Mengen gerecht zu werden, müssen wir also Homomorphismen und Isomorphismen strenger definieren:

**1.1.5. Definition.** Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen zwei geordneten Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ heißt *(Ordnungs-) Monomorphismus* oder *Ordnungseinbettung,* falls gilt:

$$x \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

($\varphi$ ist dann injektiv.) Ist $\varphi$ zusätzlich noch bijektiv, so ist sie *(Ordnungs-) Isomorphismus.* Existiert zwischen zwei geordneten Mengen $(X, \leq)$ und $(Y \leq)$ ein Isomorphismus, so heißen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ *isomorph.* Wir schreiben hierfür $(X, \leq) \cong (Y, \leq)$ bzw. kurz $X \cong Y$.

**1.1.6. Satz. (Dualitätsprinzip für geordnete Mengen)***Die zu $\leq$ inverse Relation $\geq$ ist wieder eine Ordnungsrelation.*

*Beweis:* $\geq$ ist reflexiv: $x \geq x$ gilt für alle $x \in X$, weil $\leq$ reflexiv ist. Antisymmetrisch: Sei $x \geq y$ und $y \geq x$. Dann gilt natürlich $y \leq x$ und $x \leq y$, also ist $x = y$. Und transitiv: Sei $x \geq y$ und $y \geq z$. Dann ist $z \leq y$ und $y \leq x$, also $z \leq x$ und damit $x \geq z$. □

Wir nennen, $\geq$ die zu $\leq$ *duale Ordnung.* Weiter bezeichnen wir die *dual geordnete Menge* zu $(X, \leq)$, welche aus $X$ und der dualen Ordnung $\geq$ besteht, auch mit $(X, \leq)^d := (X, \geq)$. Ist $(X, \leq) \cong (Y, \leq)^d$, so heißen die beiden Mengen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ *dual isomorph.* Der Isomorphismus zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)^d$ heißt dann *Antiisomorphismus* zwischen $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$. Zu jeder ordnungstheoretischen Aussage gibt es eine duale Aussage, die dadurch entsteht, daß man $\leq$ und $\geq$ vertauscht.

Wir führen noch einige wichtige Begriffe für geordnete Mengen ein:

**1.1.7. Definition.** Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge und $a \in X$. Die Menge

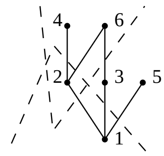
$$(a] := \{x \in X | x \leq a\}$$

heißt *Hauptideal* von $a$, und

$$[a) := \{x \in X | x \geq a\}$$

*Hauptfilter* von $a$.

**1.1.8. Beispiel.** In $X := \{1, \ldots, 6\}$ mit der Teilbarkeitsrelation (siehe rechts) ist $(2] = \{1, 2\}$ Hauptideal, und $[2) = \{2, 4, 6\}$ Hauptfilter von 2.




**1.1.9. Definition.** Sei $A$ eine Teilmenge von $(X, \leq)$. Ein Element $a \in A$ heißt *kleinstes Element* oder *Minimum* von $A$, falls für alle $x \in A$ gilt: $a \leq x$. Dual ist das *größte Element* oder *Maximum* ein $a \in A$ mit $\forall x \in A : a \geq x$.

Nicht jede Teilmenge von $X$ hat ein Minimum. Beispielsweise besitzt die Teilmenge $\{2, 3\}$ in unserem Beispiel $(\{1, \ldots, 6\}, |)$ keines. Falls aber ein Minimum existiert, so ist es eindeutig. Das Minimum eines Hauptfilters $[a)$ ist $a$, und ebenso ist das Maximum eines Hauptideals $(a]$ gleich $a$.

**1.1.10. Definition.** Sei $A$ eine Teilmenge von $(X, \leq)$. Eine *untere Schranke* zu $A$ ist ein $x \in X$ mit $x \leq a$ für alle $a \in A$. Wieder gibt es eine duale Definition, die *obere Schranke*.

**1.1.11. Definition.** Gibt es in der Menge aller unteren Schranken von $A \subseteq X$ ein Maximum, so heißt dieses *Infimum* von $A$. Wir schreiben hierfür $\bigwedge A$. Dual heißt eine kleinste obere Schranke von $A$ *Supremum* von $A$ und wir schreiben dafür $\bigvee A$. Besteht $A = \{x, y\}$ aus genau zwei Elementen, so benutzen wir für das Infimum oft auch die Notation $x \wedge y$ und für das Supremum $x \vee y$. Ist $A = \{x_i | i \in I\}$ für eine Indexmenge $I$, so ist anstatt $\bigwedge A$ auch die Schreibweise $\bigwedge_{i \in I} x_i$ üblich.

Existiert zu einer Menge $A$ das Minimum, so ist dieses gleich dem Infimum, und dual ist das Maximum, soweit es existiert, gleich dem Supremum.

Besondere Bedeutung erhalten geordnete Mengen, in denen zu je zwei Elementen immer das Infimum und Supremum existiert. Solche Mengen heißen Verbände.

## 1.2 Vollständige Verbände

Wir betrachten in diesem Abschnitt die wichtigsten Definitionen und Sätze der Verbandstheorie, die wir benötigen. Wie wir bereits am Anfang des Kapitels erläutert haben, müssen wir dabei auf Motivationen und ausführliche Beispiele verzichten. Wir beweisen dennoch die meisten Aussagen, da die Beweise zwar nicht sehr schwer sind, aber aufgrund dessen selbst in der Standardliteratur oft dem Leser überlassen werden.

**1.2.1. Definition.** Eine (partiell) geordnete Menge $(V, \leq)$ heißt *Verband*, falls für je zwei Elemente $x, y \in V$ stets das Infimum $x \wedge y$ und das Supremum $x \vee y$ existiert. $V$ heißt *vollständiger Verband*, falls zu jeder Teilmenge $A \subseteq V$ das Infimum $\bigwedge A$ und das Supremum $\bigvee A$ existiert.

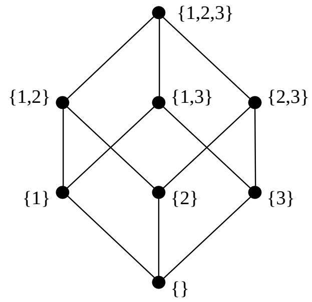



Abbildung 1.2: Der Potenzmengenverband der Menge $X = \{1, 2, 3\}$

In einem vollständigen Verband $V$ gibt es immer ein kleinstes Element $0_V := \bigwedge V$ und ein größtes Element $1_V := \bigvee V$. Damit ist die Definition von Infimum und Supremum auch für die leere Menge sinnvoll:

$$\bigwedge \emptyset = \bigvee V = 1_V$$
$$\bigvee \emptyset = \bigwedge V = 0_V$$

**1.2.2. Beispiel.**

1. Für jede Menge $M$ bildet die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit der Inklusion $\subseteq$ einen vollständigen Verband. Abbildung 1.2 zeigt den Verband der Potenzmenge zu $\{1, 2, 3\}$.
2. Ein Beispiel eines nicht vollständigen Verbandes ist durch $(\mathbb{N}, \leq)$ gegeben, denn zu je 2 Elementen $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es das Infimum $\min(n, m)$ und Supremum $\max(n, m)$, aber $\bigvee \mathbb{N}$ existiert nicht.
3. Die Menge $\{1, \ldots, 6\}$ bildet mit der Teilbarkeitsrelation (vgl. Abb. 1.1, Mitte) keinen Verband, da $4 \vee 6$ nicht existiert.

Den grundlegenden Zusammenhang zwischen der Ordnungsrelation und den binären Operationen $\wedge$ und $\vee$ eines Verbandes formulieren wir in folgendem Satz:

**1.2.3. Satz.** *In einer (partiell) geordneten Menge $(V, \leq)$ gilt:*

$$x \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y \Leftrightarrow x \vee y = y$$

*(Hierbei bedeutet $x = x \wedge y$ eigentlich: 1. Das Infimum von $\{x, y\}$ existiert, und 2. $x = x \wedge y$.)*

*Beweis:* Sei $x \leq y$. Dann ist $x$ untere Schranke von $\{x, y\}$ und für jede weitere untere Schranke $u$ gilt $u \leq x$. Also ist $x$ die größte untere Schranke, es existiert das Infimum zu $\{x, y\}$ und es gilt: $x = x \wedge y$.
Sei umgekehrt $x = x \wedge y$, dann ist $x$ untere Schranke von $\{x, y\}$, es gilt also

insbesondere $x \leq y$.
Mit Hilfe des Dualitätsprinzips für geordnete Mengen (1.1.6) zeigt man die zweite Äquivalenz: $y \geq x \Leftrightarrow y = x \vee y$. □

Das Dualitätsprinzip für geordnete Mengen läßt sich damit auch auf Verbände erweitern:

**1.2.4. Satz. (Dualitätsprinzip für Verbände)** *Ist $(V, \leq)$ ein Verband, so auch $(V, \leq)^d$. Die Operationen $\wedge$ und $\vee$ werden dabei vertauscht.*

*Beweis:* Dies folgt aus dem Dualitätsprinzip für geordnete Mengen (1.1.6). □

Man erhält also zu einer verbandstheoretischen Aussage eine duale Aussage, indem man $\wedge$ und $\vee$ (und weitere Begriffe entsprechend) vertauscht.

Die binären Operationen $\wedge$ und $\vee$ eines Verbandes haben wichtige algebraische Eigenschaften, welche teilweise analog zu denen von Multiplikation und Addition in Ringen sind. Zunächst zeigen wir:

**1.2.5. Satz.** *Sei $(V, \leq)$ ein Verband. Dann gilt:*

1. $x \wedge x = x$ *und* $x \vee x = x$ *(Idempotenz)*
2. $x \wedge y = y \wedge x$ *und* $x \vee y = y \vee x$ *(Kommutativität)*
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ *und* $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *(Assoziativität)*
4. $x \wedge (x \vee y) = x \vee (x \wedge y) = x$ *(Absorption)*

*Beweis:*
Idempotenz und Kommutativität sind nach Definition trivial. Die Assoziativität gilt, da sowohl $x \wedge (y \wedge z)$, als auch $(x \wedge y) \wedge z$ gleich dem Infimum der Menge $\{x, y, z\}$ sind. Die Absorption folgt aus 1.2.3: Da $x \leq x \vee y$ ist, gilt $x = x \wedge (x \vee y)$ und weil $x \wedge y \leq x$ ist, gilt auch $(x \wedge y) \vee x = x$. □

Diese Eigenschaften für die binären Operationen $\wedge$ und $\vee$ sind sogar hinreichend, um einen Verband zu definieren.

**1.2.6. Satz.** *Sei $(V, \wedge, \vee)$ eine Menge mit zwei binären Operatoren, sodaß die Eigenschaften 1.–4. von Satz 1.2.5 erfüllt sind. Dann ist $V$ ein Verband. Die Ordnungsrelation erhält man durch*

$$x \leq y \Leftrightarrow x = (x \wedge y) \, [\Leftrightarrow y = (y \vee x)]$$

*Beweis:* Zum Beweis siehe [Bir73], Theorem 8 auf Seite 10. □

Wir haben in Satz 1.2.5 unter anderem gezeigt, daß die Operationen $\wedge$ und $\vee$ assoziativ sind. Diese Aussage können wir sogar noch verallgemeinern:

**1.2.7. Satz. (Assoziativität der Infima und Suprema)** *Sei $(V, \leq)$ vollständiger Verband, und für $i \in I$ seien die Teilmengen $A_i \subseteq V$ gegeben. (I sei dabei beliebige Indexmenge.) Dann gilt:*

$$\bigwedge_{i\in I}(\bigwedge A_i) = \bigwedge(\bigcup_{i\in I} A_i) \quad \textit{und dual} \quad \bigvee_{i\in I}(\bigvee A_i) = \bigvee(\bigcup_{i\in I} A_i)$$

*Beweis:* $\bigwedge_{i\in I}(\bigwedge A_i)$ ist die größte untere Schranke von der Menge aller größten unteren Schranken der $A_i$, $i \in I$, ist also auch untere Schranke von $\bigcup_{i\in I} A_i$. Jede weitere untere Schranke von $\bigcup_{i\in I} A_i$ ist insbesondere auch untere Schranke von jedem $A_i$, also $\leq \bigwedge A_i$ für alle $i \in I$. Also ist $\bigwedge_{i\in I}(\bigwedge A_i)$ größte untere Schranke von $\bigcup_{i\in I} A_i$, d.h. $\bigwedge_{i\in I}(\bigwedge A_i) = \bigwedge(\bigcup_{i\in I} A_i)$.
Die Assoziativität des Infimums zeigt man dual. □

Uns interessieren hier speziell die vollständigen Verbände.

**1.2.8. Satz.** *Jeder nichtleere endliche Verband ist vollständiger Verband.*

*Beweis:* Sei $V$ endlicher Verband. Wir zeigen zunächst durch Induktion nach $n$, daß für jedes $A \subseteq V$ mit $|A| = n > 0$ das Infimum $\bigwedge A$ existiert:
1. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial, und für $n = 2$ gilt sie, da $V$ Verband ist.
2. Sei $n > 2$. Falls für alle $B \subseteq V$ mit $|B| \leq n - 1$ das Infimum existiert, und falls $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq V$ ist, so existiert: $x := (\bigwedge\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}) \wedge a_n$. Dies ist gleichzeitig untere Schranke zu $A$. Für jede weitere untere Schranke $y$ von $A$ gilt insbesondere $y \leq \bigwedge\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ und $y \leq a_n$, also gilt auch $y \leq x$, d.h. $x$ ist größte untere Schranke von $A$.
Es folgt also, daß für alle endlichen nichtleeren Teilmengen das Infimum existiert. Dual existiert für jede endliche nichtleere Teilmenge auch das Supremum. Ist nun $V$ selbst endlich und nichtleer, so existiert auch $\bigwedge \emptyset = \bigvee V$ und $\bigvee \emptyset = \bigwedge V$. □

**1.2.9. Satz.** *Eine (partiell) geordnete Menge $(V, \leq)$ ist ein vollständiger Verband, falls zu jeder Teilmenge von $V$ das Infimum existiert.*

*Beweis:* Wir müssen nachweisen, daß zu jeder Menge $A \subseteq V$ auch das Supremum existiert.
Sei dazu $A \subseteq V$ beliebig. Die Menge $X$ aller oberen Schranken von $A$ besitzt nach Vorraussetzung ein Infimum $i$. Da jedes Element $a$ aus $A$ untere Schranke zu $X$, und $i$ die größte untere Schranke zu $X$ ist, gilt $a \leq i$ für alle $a \in A$. Also ist auch $i$ obere Schranke von $A$, und somit kleinste obere Schranke, d.h Supremum von $A$. □

Dual genügt natürlich auch die Existenz des Supremums zu jeder Teilmenge von $V$, um nachzuweisen, daß $V$ ein vollständiger Verband ist.

**1.2.10. Definition.** Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ zwischen zwei vollständigen Verbänden heißt $\wedge$-*erhaltend*, falls für alle $A \subseteq V$ gilt:

$$\varphi(\bigwedge A) = \bigwedge \varphi(A).$$

Entsprechend definieren wir $\vee$-erhaltend. Ist $\varphi$ sowohl $\wedge$- als auch $\vee$-erhaltend, so ist $\varphi$ ein *vollständiger (Verbands-)Homomorphismus*. Ein vollständiger bijektiver Homomorphismus heißt auch *Verbandsisomorphismus*.

**1.2.11. Satz.** *Eine Abbildung zwischen zwei vollständigen Verbänden ist genau dann Verbandsisomorphismus, wenn sie Ordnungsisomorphismus ist.*

*Beweis:*
„$\Rightarrow$". Sei $x \leq y$. Dann ist $\varphi(x) \wedge \varphi(y) = \varphi(x \wedge y) = \varphi(x)$, d.h. $\varphi(x) \leq \varphi(y)$. Umgekehrt folgt aus $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ die Gleichung $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x)$. Da $\varphi$ ein Isomorphismus ist, muß also $x = x \wedge y$ gelten, d.h. $x \leq y$.
„$\Leftarrow$". Sei $A \subseteq V$. Für alle $x \in A$ gilt $\bigwedge A \leq x$, also auch $\varphi(\bigwedge A) \leq \varphi(x)$. $\varphi(\bigwedge A)$ ist demnach untere Schranke von $\varphi(A)$. Ist $\varphi(a)$ weitere untere Schranke von $\varphi(A)$, so gilt für alle $x \in A$: $\varphi(a) \leq \varphi(x)$, also auch $a \leq x$. Es folgt $a \leq \bigwedge A$, und damit $\varphi(a) \leq \varphi(\bigwedge A)$.
Damit haben wir $\varphi(\bigwedge A) = \bigwedge \varphi(A)$ gezeigt. $\varphi(\bigvee A) = \bigvee \varphi(A)$ zeigt man dual. $\square$

Bei den Verallgemeinerungen der Begriffsanalyse werden die $\vee$-irreduziblen Elemente eine zentrale Rolle spielen. Wir definieren diese wie folgt:

**1.2.12. Definition.** Sei $(V, \leq)$ vollständiger Verband, und $v \in V$. Dann ist

$$v^\vee := \bigvee \{x \in V | x < v\} \text{ und}$$
$$v^\wedge := \bigwedge \{x \in V | x > v\}$$

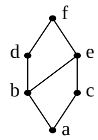
Wir nennen $v$ $\vee$-*irreduzibel*, falls $v \neq v^\vee$, wenn also $v$ nicht als Supremum echt kleinerer Elemente dargestellt werden kann. Entsprechend heißt $v$ $\wedge$-*irreduzibel*, falls $v \neq v^\wedge$. Die Mengen aller $\vee$- bzw. $\wedge$-irreduziblen Elemente bezeichnen wir mit

$$I^\vee(V) := \{x \in V | x \neq x^\vee\} \text{ und}$$
$$I^\wedge(V) := \{x \in V | x \neq x^\wedge\}.$$

**1.2.13. Satz.** *In einem endlichen Verband $(V, \leq)$ ist ein $v \in V$ genau dann $\vee$-irreduzibel, wenn es (genau) einen unteren Nachbarn hat, und genau dann $\wedge$-irreduzibel, wenn $v$ (genau) einen oberen Nachbarn hat.*

*Beweis:*
„$\Rightarrow$“. Ist $v$ $\vee$-irreduzibel, so ist $v^\vee = \bigvee\{x \in V | x < v\}$ unterer Nachbar von $v$. Es gibt keinen weiteren unteren Nachbar von $v$, da für alle $x < v$ auch $x \leq v^\vee$ folgt.
„$\Leftarrow$“. Im endlichen Verbänden gilt folgende Aussage: Ist $x < v$, so gibt es einen unteren Nachbarn $w$ von $v$, sodaß auch $x \leq w$ ist. Falls also $v$ nur einen unteren Nachbarn $w$ besitzt, so muß $x \leq w$ für jedes $x \in V$ mit $x < v$ gelten. Also ist $v^\vee = \bigvee\{x \in V | x < v\} \leq w$, und damit $v^\vee \neq v$. □

**1.2.14. Beispiel.** Im rechtsstehenden vollständigen Verband sind die Elemente $b$, $c$ und $d$ $\vee$-irreduzibel. $a$ ist das Supremum der leeren Menge, $e = b \vee c$ und $f = d \vee e$ lassen sich beide als Supremum von echt kleineren Elementen darstellen.




Die Aussage, die wir für den Beweis der Rückrichtung in 1.2.13 benötigt haben, gilt nicht in unendlichen vollständigen Verbänden. So ist beispielsweise das reelle Intervall $[0,1]$ ein vollständiger Verband – jede Teilmenge hat ein Supremum und ein Infimum. Aber kein $v \in [0,1]$ besitzt einen unteren Nachbarn. Stattdessen gibt es für jedes $0 \neq v \in [0,1]$ eine Folge $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen $v_i < v$, deren Supremum gleich $v$ ist. Entsprechend kann ein Element $v$ eines unendlichen vollständigen Verband $V$ zwar genau einen unteren Nachbarn haben. Aber es kann weiterhin eine Folge von Elementen $v_i < v$ $(i \in \mathbb{N})$ geben, mit $\bigvee_{i \in \mathbb{N}} v_i = v$. Also gilt die Rückrichtung im obigen Satz nicht für unendliche vollständige Verbände.

**1.2.15. Definition.** Eine Teilmenge $A \subseteq V$ des vollständigen Verbandes $(V, \leq)$ heißt $\vee$-*dicht*, falls jedes Element von $V$ als Supremum von Elementen aus $A$ dargestellt werden kann. Entsprechend nennen wir $A$ $\wedge$-*dicht*, falls für alle $v \in V$ gilt: $v = \bigwedge\{x \in A | v \leq x\}$.

**1.2.16. Satz.** *Jede $\vee$-dichte Teilmenge $A$ eines vollständigen Verbandes $(V, \leq)$ enthält die Menge $I^\vee(V)$ aller $\vee$-irreduziblen Elemente von $V$. Ist $V$ endlich, so ist umgekehrt $I^\vee(V)$ bereits $\vee$-dicht in $V$.*
*Eine duale Aussage gilt für $\wedge$-dichte Teilmengen von $V$ und $I^\wedge(V)$.*

*Beweis:* Der erste Teil des Satzes ist trivial, da ein $v \in I^\vee(V)$ nicht als Supremum echt kleinerer Elemente dargestellt werden kann. Also muß $v$ selbst in $A$ enthalten sein.
Die zweite Aussage beweisen wir induktiv: Ist $V$ endlich, und ist $v \in V$ nicht $\vee$-irreduzibel, so ist es Supremum echt kleinerer Elemente. Sind diese Elemente jeweils Suprema von $\vee$-irreduziblen Elementen, so gilt das auch für $v$. Als Induktionsanfang betrachtet man die oberen Nachbarn der $0_V$. Diese sind $\vee$-irreduzibel, da sie nur einen unteren Nachbarn haben (die $0_V$).
Wir haben bisher gezeigt, daß sich alle Elemente $v > 0_V$ als Supremum von Elementen aus $I^\vee(V)$ darstellen lassen. Die $0_V$ ihrerseits ist das Supremum der leeren Menge, also trivialerweise als Supremum von $\vee$-irreduziblen Elementen darstellbar. Also ist $I^\vee(V)$ $\vee$-dicht. □

**1.2.17. Folgerung.** In einem endlichen Verband $(V, \leq)$ ist jedes $v \in V$ in folgender Form darstellbar:

$$v = \bigvee \{x \in I^{\vee}(V) | x \leq v\} = \bigwedge \{x \in I^{\wedge}(V) | x \geq v\}$$

**1.2.18. Beispiel.** In Potenzmengen wird die Darstellung der Elemente als Supremum $\vee$-irreduzibler Elemente leicht klar: Sei $X$ eine Menge. Dann bildet die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ bekanntlich einen vollständigen Verband. Die $\vee$-irreduziblen Elemente in $\mathfrak{P}(X)$ sind genau die einelementigen Teilmengen von $X$. Nun ist jede Teilmenge $A \subseteq X$ (d.h. jedes Element $A \in \mathfrak{P}(X)$ der Potenzmenge) als Vereinigung (d.h. als Supremum) von einelementigen Teilmengen, also von $\vee$-irreduziblen Elementen, darstellbar:

$$A = \bigcup \{\{a\} | \{a\} \subseteq A\}$$

In unendlichen vollständigen Verbänden muß $I^{\vee}(V)$ nicht unbedingt $\vee$-dicht sein. Beispielsweise besitzt das bereits erwähnte reelle Intervall $[0, 1]$ überhaupt keine $\vee$-irreduziblen Elemente.

**1.2.19. Definition.** Eine Teilmenge $U$ des vollständigen Verbandes $(V, \leq)$ heißt $\wedge$-*Unterhalbverband*, falls sie abgeschlossen bezüglich Infimumbildung ist, falls also gilt:

$$A \subseteq U \Rightarrow \bigwedge A \in U$$

Eine gegen Supremumbildung abgeschlossene Teilmenge von $V$ heißt entsprechend $\vee$- *Unterhalbverband.* Ist $U$ sowohl gegen Suprema, als auch gegen Infima abgeschlossen, so heißt $U$ vollständiger Unterverband von $V$.

Jeder Unterhalbverband ist wegen 1.2.9 seinerseits wieder vollständiger Verband. Es gibt also insbesondere ein größtes und ein kleinstes Element.

Im nächsten Abschnitt führen wir eine Klasse von Abbildungen in $V$ ein, sodaß man jeden $\wedge$-Unterhalbverband durch eine solche Abbildung darstellen kann.

## 1.3 Hüllenoperatoren

Hüllenoperatoren werden meistens als Abbildungen auf der Potenzmenge einer Menge $X$ eingeführt. Wir gehen hier etwas allgemeiner vor und führen Hüllenoperatoren auf geordneten Mengen ein. Falls die geordnete Menge ein vollständiger Verband ist, so werden wir sehen, daß dann die Menge der Hüllen (das sind die Bilder des Hüllenoperators) einen $\wedge$-Unterhalbverband bildet.

**1.3.1. Definition.** Sei $(X, \leq)$ eine (partiell) geordnete Menge. Eine Abbildung

$$\gamma\colon X \to X, x \mapsto \gamma(x)$$

heißt *Hüllenoperator* auf $X$, falls für alle $x, y \in X$ gilt:

1. $x \leq y \Rightarrow \gamma(x) \leq \gamma(y)$ (Monotonie)
2. $x \leq \gamma(x)$ (Extensivität)
3. $\gamma(\gamma(x)) = \gamma(x)$ (Idempotenz)

$\gamma(x)$ heißt dann die *Hülle* oder der *Abschluß* von $x$, oder abgeschlossen.
Wir bezeichnen die Menge der Hüllen mit

$$\mathfrak{H}_\gamma := \{\gamma(x) | x \in X\}$$

Falls die betrachtete geordnete Menge $X$ zusätzlich Verbandsstruktur hat, so bezeichnen wir diese intuitiver mit $V$. Ist nun $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband, so ist die Menge der Hüllen eines Hüllenoperators ein $\wedge$-Unterhalbverband. Es gilt sogar:

**1.3.2. Satz.** *Sei $(V, \leq)$ ein vollständiger Verband. Dann gilt:*
*Die Abbildung, welche jedem Hüllenoperator $\gamma$ die Menge seiner Hüllen $\mathfrak{H}_\gamma$ zuordnet, ist eine Bijektion zwischen der Menge aller Hüllenoperatoren auf $V$ und der Menge aller $\wedge$-Unterhalbverbände von $V$.*
*Oder in anderen Worten:*

1. *Für jeden Hüllenoperator $\gamma\colon V \to V$ ist*

$$\mathfrak{H}_\gamma := \gamma(V)$$

   *ein $\wedge$-Unterhalbverband.*

2. *Für jeden $\wedge$-Unterhalbverband $\mathfrak{H} \subseteq V$ ist*

$$\gamma_{\mathfrak{H}}\colon V \to V, x \mapsto \bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | x \leq y\}$$

   *ein Hüllenoperator.*

3. *Für alle Hüllenoperatoren $\gamma$ und alle $\wedge$-Unterhalbverbände $\mathfrak{H}$ gilt:*

$$\gamma_{(\mathfrak{H}_\gamma)} = \gamma \;\; \textit{und} \;\; \mathfrak{H}_{(\gamma_{\mathfrak{H}})} = \mathfrak{H}$$

*Beweis:*
1. Wegen der Extensität ist $1_V \leq \gamma(1_V)$, also ist $\bigwedge \emptyset = 1_V = \gamma(1_V) \in \mathfrak{H}_\gamma$. Sei weiter $\emptyset \neq A \subseteq \mathfrak{H}_\gamma$ und sei $y := \bigwedge A$. Für jedes $\gamma(x) \in A$ gilt wegen der Monotonie und der Idempotenz $\gamma(y) \leq \gamma(\gamma(x)) = \gamma(x)$ und damit $\gamma(y) \leq \bigwedge A = y \leq \gamma(y)$. Also ist $y = \gamma(y) \in \mathfrak{H}_\gamma$.

2. $\gamma_{\mathfrak{H}}$ ist monoton, da für $x_1 \leq x_2$ wegen $\{y \in \mathfrak{H} | x_1 \leq y\} \supseteq \{y \in \mathfrak{H} | x_2 \leq y\}$ folgende Ungleichung gilt: $\gamma_{\mathfrak{H}}(x_1) = \bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | x_1 \leq y\} \leq \bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | x_2 \leq y\} = \gamma_{\mathfrak{H}}(x_2)$. Die Extensivität ist trivial, denn: $x \leq \bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | x \leq y\} = \gamma_{\mathfrak{H}}(x)$. Und die Idempotenz ebenfalls: $\gamma_{\mathfrak{H}}(\gamma_{\mathfrak{H}}(x)) = \bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | \gamma_{\mathfrak{H}}(x) \leq y\} = \gamma_{\mathfrak{H}}(x)$, weil $\gamma_{\mathfrak{H}}(x) \in \mathfrak{H}$ ist.
3. $\gamma_{(\mathfrak{H}_\gamma)}(x) = \bigwedge\{\gamma(y) \in \mathfrak{H}_\gamma | x \leq \gamma(y)\}$. Wegen der $\wedge$-Abgeschlossenheit von $\mathfrak{H}_\gamma$ gibt es ein $\gamma(z) \in \mathfrak{H}_\gamma$ mit $\gamma_{(\mathfrak{H}_\gamma)}(x) = \gamma(z)$. Für dieses $\gamma(z)$ gilt wegen der Extensivität von $\gamma$: $x \leq \gamma(z) \leq \gamma(x)$. Wegen Monotonie und Idempotenz von $\gamma$ folgt aber $\gamma(x) \leq \gamma(\gamma(z)) = \gamma(z)$, also $\gamma(z) = \gamma(x)$. Wir erhalten $\gamma_{(\mathfrak{H}_\gamma)}(x) = \gamma(x)$.
Weiter ist $\mathfrak{H}_{(\gamma_{\mathfrak{H}})} = \{\gamma_{\mathfrak{H}}(x) | x \in V\} = \{\bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | x \leq y\} | x \in V\}$. Da $\mathfrak{H}$ $\wedge$-abgeschlossen ist, folgt $\mathfrak{H}_{(\gamma_{\mathfrak{H}})} \subseteq \mathfrak{H}$. Für ein $x \in \mathfrak{H}$ gilt weiter: $\bigwedge\{y \in \mathfrak{H} | x \leq y\} = x$, also ist auch $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}_{(\gamma_{\mathfrak{H}})}$. □

**1.3.3. Beispiel.** Sei $(X, \mathfrak{O})$ ein topologischer Raum, d.h. $X$ sei eine Menge und $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die Menge der offenen Teilmengen von $X$. Dann ist der Operator $\mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X), A \mapsto \bar{A}$, welcher jeder Teilmenge $A$ von $X$ die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ zuordnet, ein Hüllenoperator. Die Menge der Hüllen $\mathfrak{H}$ enthält dann genau die abgeschlossenen Teilmengen von $X$, welche offensichtlich abgeschlossen bzgl. Schnittbildung sind.

Mit Hilfe des Hüllenoperators können wir nun das Supremum innerhalb eines $\wedge$-Unterhalbverbandes angeben:

**1.3.4. Satz.** *Jeder $\wedge$-Unterhalbverband $\mathfrak{H}$ eines vollständigen Verbandes $(V, \leq)$ bildet mit $\leq$ einen neuen vollständigen Verband. Infimum und Supremum zu einem $A \subseteq \mathfrak{H}$ sind:*

$$\bigwedge\nolimits_{\mathfrak{H}} A = \bigwedge\nolimits_V A$$
$$\bigvee\nolimits_{\mathfrak{H}} A = \gamma_{\mathfrak{H}}(\bigvee\nolimits_V A)$$

*Beweis:* Das Infimum in $\mathfrak{H}$ ist gleich dem Infimum in $V$, da $\mathfrak{H}$ $\wedge$-abgeschlossen ist. Das Supremum ist die kleinste obere Schranke von $A$, also das kleinste $x \in \mathfrak{H}$, mit $x \geq \bigvee_V A$. Wegen der Extensivität von $\gamma_{\mathfrak{H}}$ gilt $\bigvee_V A \leq \gamma_{\mathfrak{H}}(\bigvee_V A)$. Sei weiter $\bigvee_V A \leq y \in \mathfrak{H}$, so folgt aus der Monotonie von $\gamma_{\mathfrak{H}}$: $\gamma_{\mathfrak{H}}(\bigvee_V A) \leq \gamma_{\mathfrak{H}}(y) = y$. □

## 1.4 Galoisverbindungen

Ein weiteres, sehr verbreitetes mathematisches Hilfsmittel, das in der formalen Begriffsanalyse *die* zentrale Rolle spielt, sind die Galoisverbindungen. Eine ausführliche, grundlegende Behandlung dieser Strukturen, die auch unter den Namen residuierte bzw. residuale Abbildungen bekannt sind, findet man in [Bly72].

**1.4.1. Definition.** Seien $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ (partiell) geordnete Mengen, und seien $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to X$ Abbildungen. $(\varphi, \psi)$ heißt *Galoisverbindung* zwischen $X$ und $Y$, falls gilt:

1. $\varphi$ und $\psi$ sind antiton:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) \quad \text{und} \quad y_1 \leq y_2 \Rightarrow \psi(y_1) \geq \psi(y_2)$$

2. $\psi\varphi$ und $\varphi\psi$ sind extensiv:

$$x \leq \psi\varphi(x) \quad \text{und} \quad y \leq \varphi\psi(y)$$

$\varphi$ und $\psi$ nennt man dann *dualadjungiert.*

**1.4.2. Satz.** *Seien $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ (partiell) geordnete Mengen, und seien $\varphi : X \to Y$, sowie $\psi : Y \to X$ Abbildungen. $(\varphi, \psi)$ ist genau dann Galoisverbindung, wenn gilt:*

$$x \leq \psi(y) \Leftrightarrow \varphi(x) \geq y$$

*Beweis:*
„$\Rightarrow$“. Sei $(\varphi, \psi)$ Galoisverbindung. Wir zeigen, daß dann obige Äquivalenz gilt: Sei dazu $x \leq \psi(y)$. Dann ist wegen der Antitonie von $\varphi$ und der Extensivität von $\varphi\psi$: $\varphi(x) \geq \varphi\psi(y) \geq y$. Die andere Richtung der Äquivalenz läßt sich analog zeigen.
„$\Leftarrow$“. Es gelte obige Bedingung. Aus $\varphi(x) \geq \varphi(x)$ folgt dann $x \leq \psi\varphi(x)$ und aus $x_1 \leq x_2$ folgt mit der eben gezeigten Extensivität von $\psi\varphi$: $x_1 \leq \psi\varphi(x_2)$, also $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. Das heißt, $\varphi$ ist antiton. Analog kann man die Extensivität von $\varphi\psi$ und die Antitonie von $\psi$ nachrechnen. $\square$

**1.4.3. Beispiel.** Die Galoisverbindung ist benannt nach der Galoistheorie, die als erstes eine solche Struktur behandelte: Die Abbildungen zwischen der Menge aller Zwischenkörper einer galoisschen Körpererweiterung und den Untergruppen der Galoisgruppe bilden nämlich eine Galoisverbindung.

**1.4.4. Satz.** *Seien $X$, $Y$ (partiell) geordnete Mengen, und sei $(\varphi, \psi)$ Galoisverbindung zwischen $X$ und $Y$. Dann gilt:*

1. $\varphi = \varphi\psi\varphi$ *und* $\psi = \psi\varphi\psi$
2. $\psi\varphi$ *und* $\varphi\psi$ *sind Hüllenoperatoren auf* $X$ *und* $Y$.
3. *Für die Hüllen von* $\psi\varphi$ *bzw. von* $\varphi\psi$ *gilt:* $\mathfrak{H}_{\psi\varphi} = \psi(Y)$ *und* $\mathfrak{H}_{\varphi\psi} = \varphi(X)$.
4. $\varphi|_{\psi(Y)}$ *und* $\psi|_{\varphi(X)}$ *sind zueinander inverse (Ordnungs-) Antiisomorphismen zwischen* $\psi(Y)$ *und* $\varphi(X)$. *Das heißt* $\varphi|_{\psi(Y)}$ *und* $\psi|_{\varphi(X)}$ *sind zueinander invers, und für* $x_1, x_2 \in \psi(Y)$ *gilt:* $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$.

*Beweis:*
1. Mit $y := \varphi(x)$ und der Extensivität von $\varphi\psi$ erhält man $\varphi(x) = y \leq \varphi\psi(y) = \varphi\psi\varphi(x)$. Andererseits gilt wegen der Extensivität von $\psi\varphi$: $x \leq \psi\varphi(x)$. Aus der Antitonie von $\varphi$ folgt dann $\varphi(x) \geq \varphi\psi\varphi(x)$. Insgesamt erhalten wir $\varphi = \varphi\psi\varphi$.
$\psi = \psi\varphi\psi$ läßt sich analog zeigen.
2. Die Abbildungen $\psi\varphi$ und $\varphi\psi$ sind monoton (z.B.: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2) \Rightarrow \psi\varphi(x_1) \leq \psi\varphi(x_2)$). Extensivität ist nach Definition gegeben, und die Idempotenz folgt aus (1) (z.B. $\psi\varphi\psi\varphi = \psi\varphi$).
3. Nach Definition ist $\mathfrak{H}_{\psi\varphi} = \psi\varphi(X)$. Da $\varphi(X) \subseteq Y$ ist, gilt: $\mathfrak{H}_{\psi\varphi} \subseteq \psi(Y)$. Wegen (1) und $\psi(Y) \subseteq X$ gilt aber auch: $\psi(Y) = \psi\varphi\psi(Y) \subseteq \psi\varphi(X) = \mathfrak{H}_{\psi\varphi}$.
$\mathfrak{H}_{\varphi\psi} = \varphi(X)$ gilt analog.
4. Trivialerweise gilt $\varphi(\psi(Y)) \subseteq \varphi(X)$ und $\psi(\varphi(X)) \subseteq \psi(Y)$.
Sei $x \in \psi(Y)$, d.h. $x = \psi(y)$ für ein $y \in Y$. Dann gilt: $\psi\varphi(x) = \psi\varphi\psi(y) = \psi(y) = x$. Analog gilt: $\varphi\psi(y) = y$ für ein $y \in \varphi(X)$. Also sind $\varphi|_{\psi(Y)}$ und $\psi|_{\varphi(X)}$ zueinander invers.
Falls $x_1 \leq x_2$ ist, so folgt aus der Antitonie von $\varphi$: $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. Ist umgekehrt $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$, so folgt aus der Antitonie von $\psi$: $x_1 = \psi\varphi(x_1) \leq \psi\varphi(x_2) = x_2$. □

**1.4.5. Folgerung.** Sind $X$ und $Y$ vollständige Verbände, so sind $\varphi(X)$ und $\psi(Y)$ $\wedge$-Unterhalbverbände, und demnach – mit geeigneten Suprema – auch vollständige Verbände.

Es stellt sich nun die Frage, wann zu einer Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ zwischen geordneten Mengen eine *Dualadjungierte* existiert, d.h. eine Abbildung $\psi\colon Y \to X$, sodaß $(\varphi, \psi)$ eine Galoisverbindung ist.

**1.4.6. Definition.** Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen (partiell) geordneten Mengen heißt *Galoisabbildung,* falls eine dualadjungierte Abbildung $\varphi^d\colon Y \to X$ existiert, d.h. eine Abbildung, so daß $(\varphi, \varphi^d)$ Galoisverbindung ist.

**1.4.7. Satz.** *Seien $X, Y$ (partiell) geordnete Mengen und $\varphi\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:*

1. *$\varphi$ ist genau dann eine Galoisabbildung, wenn das Urbild jedes Hauptfilters ein Hauptideal ist.*
2. *Sind $X$ und $Y$ vollständige Verbände, so ist $\varphi$ genau dann Galoisabbildung, wenn für jede Teilmenge $A \subseteq X$ gilt:*
$$\varphi(\bigvee A) = \bigwedge \varphi(A)$$
3. *Ist $\varphi$ Galoisabbildung, so ist die Dualadjungierte eindeutig bestimmt durch*
$$\varphi^d(y) := \bigvee \varphi^{-1}([y)) = \bigvee \{x \in X | \varphi(x) \geq y\}.$$

*Beweis:*
1. „$\Leftarrow$". Für $\varphi$ sei das Urbild jedes Hauptfilters ein Hauptideal. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Menge $F_y := \varphi^{-1}([y)) = \{x \in X | \varphi(x) \geq y\}$ ein Hauptideal. Jedes Hauptideal hat aber ein Maximum, dieses ist dann gleich dem Supremum. Mit $\varphi^d(y) := \bigvee F_y$ gilt also: $F_y = (\varphi^d(y)]$. Insgesamt gelten damit folgende Äquivalenzen (für $x \in X$, $y \in Y$ beliebig): $x \leq \varphi^d(y) \Leftrightarrow x \in F_y \Leftrightarrow \varphi(x) \geq y$. Also ist $(\varphi, \varphi^d)$ nach 1.4.2 eine Galoisverbindung.
„$\Rightarrow$". Sei $(\varphi, \psi)$ Galoisverbindung. Zu $y \in Y$ ist das Urbild von $[y)$ gleich der Menge $\{x \in X | \varphi(x) \geq y\}$. Dies ist aber nach 1.4.2 gleich $\{x \in X | x \leq \psi(y)\} = (\psi(y)]$, ist also ein Hauptideal.
2. „$\Leftarrow$". Es gelte die obige Bedingung. Betrachte für $y \in Y$ das Urbild des Hauptfilters: $F_y := \varphi^{-1}([y))$. Für dessen Supremum gilt: $\varphi(\bigvee F_y) = \bigwedge \varphi(F_y) \geq y$. Also folgt aus $x \leq \bigvee F_y$ wegen $\varphi(\bigvee F_y) = \varphi(x \vee \bigvee F_y) = \varphi(x) \wedge \varphi(\bigvee F_y)$ die Ungleichung $y \leq \varphi(\bigvee F_y) \leq \varphi(x)$. Das heißt, für jedes $x \leq \bigvee F_y$ gilt: $x \in F_y$. Und damit ist $F_y = (\bigvee F_y]$ ein Hauptideal. Nach (1) ist $\varphi$ demnach eine Galoisabbildung.
„$\Rightarrow$". Sei $(\varphi, \psi)$ Galoisverbindung, und $A \subseteq X$ beliebige Teilmenge. Wir zeigen die Behauptung wieder mit Hilfe des Kriteriums 1.4.2:

$$\begin{aligned} y \leq \bigwedge \varphi(A) \Leftrightarrow &\quad y \leq \varphi(x) && \forall x \in A \\ \Leftrightarrow &\ \psi(y) \geq x && \forall x \in A \\ \Leftrightarrow &\ \psi(y) \geq \bigvee A \\ \Leftrightarrow &\quad y \leq \varphi(\bigvee A) \end{aligned}$$

3. Daß die angegebene Funktion $\varphi^d$ wohldefiniert ist und mit $\varphi$ eine Galoisverbindung bildet, haben wir bereits in (1) gezeigt. Falls $\psi: Y \to X$ eine weitere Abbildung ist, die mit $\varphi$ eine Galoisverbindung bildet, so gilt nach 1.4.2 für alle $y \in Y$: $\psi(y) = \bigvee\{x \in X | x \leq \psi(y)\} = \bigvee\{x \in X | \varphi(x) \geq y\} = \varphi^d(y)$, d.h. die Dualadjungierte ist eindeutig bestimmt. □

Häufig werden die Galoisverbindungen auch anders eingeführt, indem man anstatt $(Y, \leq)$ die dual geordnete Menge $(Y, \leq)^d$ betrachtet. Wir nennen solche Abbildungen hier *residuierte Abbildungen:* Eine residuierte Abbildung ist eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ für die das Urbild eines Hauptideals ein Hauptideal ist. In vollständigen Verbänden sind das dann die $\vee$-erhaltenden Abbildungen. Es gibt dann genau eine zu $\varphi$ *residuale Abbildung* $\psi: Y \to X$:

**1.4.8. Satz.** *Seien $X$ und $Y$ vollständige Verbände. Zu jeder $\vee$-erhaltenden Abbildung $\varphi: X \to Y$ gibt es genau eine $\wedge$-erhaltende Abbildung $\psi: Y \to X$ mit*

$$x \leq \psi(y) \Leftrightarrow \varphi(x) \leq y.$$

*$\varphi$ und $\psi$ bestimmen sich gegenseitig durch*

$$\varphi(x) = \bigwedge\{y \in Y | \psi(y) \geq x\} \quad \text{und} \quad \psi(y) = \bigvee\{x \in X | \varphi(x) \leq y\}.$$

*Weiter sind dann $\varphi|_{\psi(Y)}$ und $\psi|_{\varphi(X)}$ zueinander inverse Ordnungsisomorphismen zwischen $\psi(Y)$ und $\varphi(X)$.*

*Beweis:* Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus den vorherigen Sätzen. Man betrachte lediglich statt $\varphi$ und $\psi$ die dualen Abbildungen $\varphi' : X \to Y^d$ und $\psi' : Y^d \to X$, welche dann eine Galoisverbindung bilden. □

## 1.5 Halbringe

Wir werden im Verlauf dieser Arbeit immer wieder ein Standardbeispiel betrachten: die Fuzzykontexte. Um diese definieren zu können, benötigen wir die Fuzzy-Algebra, das ist eine mathematische Struktur, die auf einer abgeschwächten Version des Rings beruht. Deshalb geben wir hier kurz an, was wir unter einem *Halbring* verstehen. Zum ausführlicheren Studium dieser abgeschwächten algebraischen Struktur kann ich [HeWe93] empfehlen.

**1.5.1. Definition.** Eine *Halbgruppe* ist ein Paar $(G, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $G$ und einer assoziativen Verknüpfung $\cdot : G \times G \to G$. Ist $\cdot$ zusätzlich noch kommutativ, so ist $(G, \cdot)$ eine *kommutative* Halbgruppe.

Die Eigenschaften *linksneutral*, *linksabsorbierend* und *linkskürzbar* werden wie in der Algebra üblich verwendet. Ebenso die entsprechenden „rechtsseitigen“ Begriffe.

Enthält eine Halbgruppe sowohl ein linksneutrales Element $e_l$, als auch ein rechtsneutrales Element $e_r$, so stimmen beide wegen $e_r = e_l \cdot e_r = e_l$ überein und sind eindeutig. Dieses Element nennen wir dann *neutrales Element* der Halbgruppe.

Eine analoge Aussage gilt für links- / rechtsabsorbierende Elemente $o_l$ und $o_r$, da $o_l = o_l \cdot o_r = o_r$ ist. Auch das *absorbierende Element* ist eindeutig, sofern es existiert.

Kommutative Halbgruppen schreibt man oft additiv, d.h. man verwendet als Verknüpfung $+$, anstatt mit $\cdot$. Wir bezeichnen additive kommutative Halbgruppen $(G, +)$ auch als *Halbmodul.* In Halbmoduln bezeichnet man das neutrale Element – sofern es existiert – üblicherweise als *Null* und schreibt dafür 0.

Ist beispielsweise $(V, \wedge, \vee)$ ein Verband, so können wir $(V, \vee)$ als Halbmodul ansehen. Ist der Verband vollständig, so sind dann auch unendliche Summen möglich. Wir definieren also Halbmoduln, in denen unendliche Summen erlaubt sind, wie folgt:

**1.5.2. Definition.** Ein vollständiger $\Sigma$-Halbmodul ist ein Halbmodul $(M, +)$, in welchem für jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ über $M$ die Summe $\sum_{i \in I} a_i$ existiert. Insbesondere soll auch die Summe über die leere Familie $\emptyset := (a_i)_{i \in \emptyset}$ existieren. Desweiteren fordern wir für eine beliebige Partition $I = \dot\bigcup_{j \in J} I_j$ von $I$:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} (\sum_{i \in I_j} a_i)$$

Wir haben hier nicht genau angegeben, was $\sum$ ist – es müßte allerdings klar sein, was mit diesem Symbol gemeint ist. Für eine exaktere Definition lese man in [HeWe93] das Kapitel IV. Hier werden unendliche Summen als $\Sigma$-Algebren eingeführt und eine Reihe von Axiomen aufgestellt. In Definition 3.1 auf Seite 226 wird dann der $\Sigma$-Halbmodul, und speziell der vollständige $\Sigma$-Halbmodul definiert.

Im vollständigen $\Sigma$-Halbmodul existiert immer ein neutrales Element $0 = \sum_{i \in \emptyset} a_i$, und für eine beliebige Indexmenge $I$ gilt: $\sum_{i \in I} 0 = 0$.

Weiter bezeichnen wir ein Halbmodul $(M, +)$ als *nullsummenfrei*, falls für je zwei Elemente $a, b \in M$ aus $a + b = 0$ bereits $a = b = 0$ folgt. Ist $(M, +)$ nullsummenfreier, vollständiger $\Sigma$-Halbmodul, so gilt für jede Familie $(a_i)_{i \in I}$ über $M$:

$$\sum_{i \in I} a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \text{ für alle } i \in I$$

**1.5.3. Beispiel.** Ist $(V, \wedge, \vee)$ vollständiger Verband, so ist $(V, \vee)$ auch vollständiger $\Sigma$-Halbmodul. Dieser ist nullsummenfrei. Ferner wissen wir, daß die Supremumbildung idempotent ist, also genügt es hier, anstatt der Summe über Familien $(a_i)_{i \in I}$, lediglich Summen über Mengen zu betrachten:

$$\sum_{i \in I} a_i := \bigvee_{i \in I} a_i = \bigvee \{a_i, i \in I\}$$

**1.5.4. Definition.** Ein *Halbring* ist ein Tripel $(R, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $R$ und zwei Verknüpfungen, der Addidtion $+ : R \times R \to R$, sowie der Multiplikation $\cdot : R \times R \to R$. Weiterhin gelte:

1. $(R, +)$ ist Halbmodul.
2. $(R, \cdot)$ ist Halbgruppe.
3. Es gelten die Distributivgesetze: (Sei $a, b, c \in R$ beliebig.)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Ist $(R, \cdot)$ zusätzlich noch kommutativ, so heißt der Halbring auch *kommutativ*.

In Halbringen rechnen wir nach der üblichen Regel „Punkt vor Strich“, d.h. falls nicht ausdrücklich durch Klammern etwas anderes verlangt wird, führen wir stets zuerst Multiplikationen aus, und anschließend Additionen.

Hat $(R, \cdot)$ ein neutrales Element, so bezeichnen wir dieses mit 1, und der Halbring heißt dann Halbring *mit Eins*. Falls $(R, +)$ ein neutrales Element 0 hat, so muß dieses nicht unbedingt absorbierend bezüglich der Multiplikation sein (d.h. es kann Elemente $a \in R$ geben mit $0 \cdot a \neq 0$ oder $a \cdot 0 \neq 0$). Gilt dies dennoch, so sagen wir, der Halbring habe eine *absorbierende Null*.

Ist der Halbmodul $(R, +)$ vollständiger $\Sigma$-Halbmodul, so können wir entsprechend definieren:

**1.5.5. Definition.** Ein vollständiger $\Sigma$-Halbring ist ein Halbring $(R, +, \cdot)$, mit einem vollständigen $\Sigma$-Halbmodul $(R, +)$, wobei zusätzlich noch die allgemeine Distributivität gefordert wird:
Sind $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_j)_{j\in J}$ Familien über $R$, so gilt:

$$(\sum_{i\in I} a_i) \cdot (\sum_{j\in J} b_j) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \cdot b_j$$

In einem vollständigen $\Sigma$-Halbring ist das Nullelement stets absorbierend.

Unter einem $R$-Linksmodul versteht man üblicherweise ein Modul $(M, +)$, das über eine Verknüpfung $* : R \times M \to M$ mit einem Ring $(R, +, \cdot)$ verbunden ist. Diese Verknüpfung $*$ erfüllt dabei gewisse Gesetze. Auch diesen Begriff kann man in natürlicher Weise auf Halbringe und Halbmoduln verallgemeinern:

**1.5.6. Definition.** Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Halbring und $(M, +)$ ein Halbmodul. Das Tripel $(M, +, *)$ heißt dann *R-Linkshalbmodul*, falls mit der skalaren Multiplikation $*$: $R \times M \to M$ folgende Gesetze gelten:

1. das Assoziativgesetz:
$$(r_1 \cdot r_2) * a = r_1 * (r_2 * a)$$
2. die Distributivgesetze:
$$\begin{aligned}(r_1 + r_2) * a &= r_1 * a + r_2 * a \\ r * (a + b) &= r * a + r * b\end{aligned}$$

(Wobei $r, r_1, r_2 \in R$ und $a, b \in M$ beliebig sind.) Der Halbring $(M, +, *)$ heißt weiterhin *unitär*, falls $R$ eine Eins $1_R$ hat, und

$$1_R * a = a$$

für alle $a \in M$ erfüllt ist.

Ist $R$ kommutativ, so sagen wir auch einfach *R-Halbmodul* anstatt $R$-Linkshalbmodul und definieren: $a * r := r * a$.

Auch für $R$-(Links-)Halbmoduln können wir unendliche Summen betrachten: Ist nämlich $(M, +)$ zusätzlich vollständiger $\Sigma$-Halbmodul, so heißt $M$ *vollständiger* $\Sigma$- *(Links-)halbmodul* über $R$, oder *vollständiger* $R$-$\Sigma$-*(Links-)Halbmodul,* falls das Operatoraxiom gilt:
Ist $(a_i)_{i\in I}$ Familie über $M$ so gilt für jedes $r \in R$:

$$r * (\sum_{i\in I} a_i) = \sum_{i\in I} r * a_i$$

Im Falle, daß auch $(R, +, \cdot)$ vollständiger $\Sigma$-Halbring ist, fordern wir noch allgemeiner für eine Familie $(r_i)_{i\in I}$ über $R$ und eine Familie $(a_j)_{j\in J}$ über $M$:

$$(\sum_{i\in I} r_i) * (\sum_{j\in J} a_j) = \sum_{(i,j)\in I\times j} r_i * a_j$$

# Kapitel 2

# Verallgemeinerter Kontext und Begriff

Nachdem wir die nötigen mathematischen Grundlagen zusammengestellt haben, können wir uns nun dem eigentlichen Thema dieser Arbeit widmen, der formalen Begriffsanalyse.

Es gibt bereits einige einführende Literatur zu diesem Gebiet (z.B. [GaWi96], [KeLe97]). Deshalb verzichte ich hier auf Motivationen und ausführliche Beispiele, und möchte vielmehr die Vorteile der Verallgemeinerungen darstellen, die in dieser Arbeit neu eingeführt werden. Anstatt – wie bisher üblich – Kontexte nur über Potenzmengen zu betrachten, führen wir in diesem Kapitel Kontexte und Begriffe auf geordneten Mengen bzw. vollständigen Verbänden ein, und erläutern die Analogie zur bisher üblichen Definition.

## 2.1 Definition

**2.1.1. Definition.** Ein Tripel $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ heißt *verallgemeinerter Kontext* oder *Ordnungskontext*, falls $(X, \leq)$ und $(Y, \leq)$ geordnete Mengen sind, und falls $\varphi\colon X \to Y$ eine Galoisabbildung ist. Weiter heißt $\mathbb{K}$ *Verbandskontext*, falls $X$ und $Y$ vollständige Verbände sind[1] , und *Potenzmengenkontext,* falls $X = \mathfrak{P}(G)$ und $Y = \mathfrak{P}(M)$ Potenzmengen sind.
Wir bezeichnen $x' := \varphi(x)$ als die *Ableitung* von $x \in X$ und $y' := \varphi^d(y)$ als die Ableitung von $y \in Y$. ($\varphi^d$ ist die Dualadjungierte zu $\varphi$, siehe 1.4.6.)

[1] Ich nenne einen Ordnungskontext über einem vollständigen Verband nicht „vollständiger Verbandskontext", was zwar die Definition besser umschreiben würde, allerdings u.U. zu Verwechsungen mit vollständigen mehrwertigen Kontexten führen könnte. (siehe Kapitel 3)

**2.1.2. Folgerung.** Im Ordnungskontext $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ seien $x, x_1, x_2 \in X$ und $y, y_1, y_2 \in Y$. Dann gilt:

1. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_2' \leq x_1'$
2. $x \leq x''$
3. $x' = x'''$
4. $x \leq y' \Leftrightarrow y \leq x'$

1'. $y_1 \leq y_2 \Rightarrow y_2' \leq y_1'$

2'. $y \leq y''$

3'. $y' = y'''$

Ist $\mathbb{K}$ Verbandskontext, so gelten zusätzlich für $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$:

5. $(\bigvee A)' = \bigwedge\{x'|x \in A\}$

5'. $(\bigvee B)' = \bigwedge\{y'|y \in B\}$

*Beweis:* Diese Aussagen folgen aus der Definition der Galoisverbindung (1.4.1), sowie den Sätzen 1.4.4, 1.4.2 und 1.4.7. □

**2.1.3. Beispiel.** Der klassische formale Kontext (nach [GaWi96]):
Der klassische Kontext wird meist als Tripel $\mathbb{K} = (G, M, I)$ definiert mit zwei Mengen $G$ und $M$ und einer sogenannten Inzidenzrelation $I \subseteq G \times M$. Die Ableitungen für Teilmengen $A \in \mathfrak{P}(G)$ und $B \in \mathfrak{P}(M)$ sind dann gegeben als

$$A' := \{m \in M|(g, m) \in I, \forall g \in A\}$$
$$B' := \{g \in G|(g, m) \in I, \forall m \in B\}$$

Wir können mit

$$\varphi\colon \mathfrak{P}(G) \to \mathfrak{P}(M), A \mapsto A'$$
$$\psi\colon \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(G), B \mapsto B'$$

eine Galoisverbindung zwischen den beiden Potenzmengen definieren (siehe Beweis), haben also zu $\mathbb{K}$ einen Potenzmengenkontext $(\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(M), \varphi)$ mit gleichen Ableitungsfunktionen. Umgekehrt gibt es zu jedem Potenzmengenkontext $\mathbb{K} = (\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(M), \varphi)$ einen klassischen Kontext $(G, M, I)$ mit

$$I \subseteq G \times M, (g, m) \in I :\Leftrightarrow m \in \varphi(\{g\}),$$

der die gleichen Ableitungsfunktionen hat (Beweis, Teil 2). Man kann also sagen, die klassischen Kontexte sind genau die Potenzmengenkontexte.

*Beweis:*
1. Gegeben sei ein klassischer Kontext $(G, M, I)$ und $\varphi$, $\psi$ seien wie oben definiert. Wir zeigen, daß dann $(\varphi, \psi)$ eine Galoisverbindung ist:
Sei $A \in \mathfrak{P}(G)$ und $B \in \mathfrak{P}(M)$. $B \subseteq \varphi(A) = \{m \in M|(g, m) \in I, \forall g \in A\}$ gilt genau dann, wenn $A \times B \subseteq I$ ist, und genauso ist $A \subseteq \psi(B)$ äquivalent zu $A \times B \subseteq I$. Nach 1.4.2 ist also $(\varphi, \psi)$ eine Galoisverbindung.

2. Es sei ein Potenzmengenkontext $(\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(M), \varphi)$ gegeben. Zeige, daß die Ableitungen des klassischen Kontextes $(G, M, I)$ gleich $\varphi$ bzw. gleich $\varphi^d$ sind:
Sei dazu $A \in \mathfrak{P}(G)$. Dann ist $A' = \{m \in M | (g,m) \in I, \forall g \in A\}$. Aber nach Definition liegt $(g,m)$ genau dann in $I$, wenn $m \in \varphi(\{g\})$ ist. Da $\varphi$ aber Galoisverbindung ist, gilt wegen 1.4.7(2) $m \in \bigcap_{g\in A} \varphi(\{g\})$ genau dann, wenn $m \in \varphi(\bigcup_{g\in A}\{g\}) = \varphi(A)$. Also ist $A' = \varphi(A)$. Dual zeigt man $B' = \varphi^d(B)$. □

Die Theorie der Galoisverbindungen (siehe 1.4.4) legt folgende Definition von Begriffen nahe:

**2.1.4. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein verallgemeinerter Kontext. Ein Paar von Elementen $(x, y) \in X \times Y$ heißt *Begriff* in $\mathbb{K}$, falls gilt:

$$x' = y \text{ und } y' = x$$

$x$ heißt dann der *Begriffsumfang* und $y$ der *Begriffsinhalt* von $(x, y)$. Die Menge aller Begriffe in $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$. Sie ist geordnet mittels

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \leq x_2.$$

$(x_1, y_1)$ heißt dann *Unterbegriff* von $(x_2, y_2)$ und $(x_2, y_2)$ *Oberbegriff* von $(x_1, y_1)$.

**2.1.5. Bemerkung.**

1. $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) = \{(x'', x') | x \in X\} = \{(y', y'') | y \in Y\} \subseteq \varphi^d(Y) \times \varphi(X)$
2. Seien $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ Begriffe. Dann gilt

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow y_1 \geq y_2.$$

*Beweis:*
1. Jedes $(x'', x')$ mit $x \in X$ ist wegen 1.4.4(1) ein Begriff. (Es gilt $(x'')' = x'$ und $(x')' = x''$.) Umgekehrt gilt für jeden Begriff $(x, y)$: $x'' = y' = x$, also ist $(x, y) = (x'', x')$. Wir haben gezeigt, daß $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) = \{(x'', x') | x \in X\}$ gilt. Analog kann man $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) = \{(y', y'') | y \in Y\}$ zeigen. Und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \subseteq \varphi^d(Y) \times \varphi(X)$ ist eine direkte Folgerung aus diesen beiden Aussagen.
2. Die erste Äquivalenz ist die Definition der Ordnung in $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$, und die zweite Äquivalenz gilt, weil die Ableitung einen Antiisomorphismus zwischen $\varphi^d(Y)$ und $\varphi(X)$ bildet (siehe 1.4.4(4)). □

**2.1.6. Satz.** *Die Vorschrift*

$$(x, y) \mapsto x$$

*definiert einen Ordnungsisomorphismus zwischen* $\mathfrak{B}(X, Y, \varphi)$ *und* $\varphi^d(Y)$.

*Beweis:* Wegen $x = y' = \varphi^d(y)$ ist $x \in \varphi^d(Y)$.
Die Umkehrabbildung ist definiert durch $x \mapsto (x, x')$. (Für $x \in \varphi^d(Y)$ gibt es ein $y \in Y$, sodaß $x = y'$ gilt. Also ist $(x, x') = (y', y'')$ ein Begriff.) Die beiden Abbildungen sind zueinander invers, da die Gleichheit der Begriffe bereits aus der Gleichheit der Begriffsinhalte folgt. Weiter gilt $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$ nach Definition der Ordnung, also haben wir einen Ordnungsisomorphismus. □

Ebenso ist durch $(x, y) \mapsto y$ ein Ordnungsantiisomorphismus zwischen $\mathfrak{B}(X, Y, \varphi)$ und $\varphi(X)$ definiert.

Wir bezeichnen zwei Kontexte als isomorph, falls die Begriffsmengen isomorph sind:

**2.1.7. Definition.** Seien $\mathbb{K}_i = (X_i, Y_i, \varphi_i)$ für $i = 1, 2$ zwei verallgemeinerte Kontexte. $\mathbb{K}_1$ heißt *isomorph* zu $\mathbb{K}_2$, kurz $\mathbb{K}_1 \cong \mathbb{K}_2$, falls es einen Ordnungsisomorphismus zwischen $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$ gibt.

Die interessanteren Kontexte sind über vollständigen Verbänden $X$ und $Y$ definiert. Für diese Verbandskontexte haben wir eine weitere wichtige Aussage:

**2.1.8. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext. Dann ist $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ ein vollständiger Verband. Infimum und Supremum sind für eine Menge von Begriffen $\{(x_i, y_i) | i \in I\} \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{K})$ (mit bel. Indexmenge $I$) gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \bigwedge(x_i, y_i) &= (\bigwedge x_i, (\bigwedge x_i)') = (\bigwedge x_i, (\bigvee y_i)'') \\ \bigvee(x_i, y_i) &= ((\bigwedge y_i)', \bigwedge y_i) = ((\bigvee x_i)'', \bigwedge y_i) \end{aligned}$$

*Beweis:* $B(\mathbb{K})$ ist isomorph zum vollständigen Verband $\varphi^d(Y)$, also ebenfalls vollständiger Verband (siehe 1.4.5). Aufgrund von 2.1.6 und der $\wedge$-Abgeschlossenheit von $\varphi^d(Y)$ ist $\bigwedge(x_t, y_t)$ wie angegeben. (Das zweite Gleichheitszeichen folgt aus 1.4.7(2).)
Die duale Aussage zu 2.1.6 ($B(\mathbb{K}) \to \varphi(X), (x, y) \mapsto y$ ist Ordnungsantiisomorphismus) liefert zusammen mit der $\wedge$-Abgeschlossenheit von $\varphi(X)$ die Formel für $\bigvee(x_t, y_t)$. □

## 2.2 Beispiel: Fuzzykontexte

Ein Beispiel verallgemeinerter Kontexte sind die $L$-Fuzzy-Kontexte, wie sie Silke Umbreit in [Um94] einführt. Um dieses Beispiel verstehen zu können, braucht man kein breites Grundwissen aus der Theorie unscharfer Mengen, auch wenn dies nicht schaden würde. Eine umfassende Einführung in die Fuzzy-Theorie ist beispielsweise [KlYu95].

Wir benötigen hier vielmehr die Fuzzy-Algebra, eine selbst in diesem Spezialgebiet der Mathematik relativ unbekannte – in meinen Augen aber äußerst interessante und vielversprechende – mathematische Struktur:

**2.2.1. Definition.** $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow)$ heißt *Fuzzy-Algebra*[2] , falls gilt:

1. $(L, \wedge, \vee)$ ist vollständiger Verband mit $1 := \bigvee L$ und $0 := \bigwedge L$
2. $(L, \vee, \cdot)$ ist kommutativer, vollständiger $\Sigma$-Halbring mit 1 als Einselement, d.h. es gilt zusätzlich zu (1):
   - Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ und kommutativ
   - Es gilt das allgemeine Distributivgesetz: Für alle $A \subseteq L$ und $B \subseteq L$ gilt $(\bigvee A) \cdot (\bigvee B) = \bigvee \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$
   - 1 ist neutrales Element bzgl. $\cdot$, d.h. $\forall a \in L : 1 \cdot a = a$
3. $a \rightarrow b := \bigvee \{c | c \cdot a \leq b\}$

**2.2.2. Beispiel.** Verwenden wir den in der Theorie unscharfer Mengen bekannteren Begriff der *t-Norm* – eine assoziative, monotone und symmetrische Funktion $\tau : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, mit $\tau(1, a) = a$ für alle $a \in [0,1]$ – so kann man eine Fuzzy-Algebra wie folgt erzeugen: Sei $\tau$ eine linksseitig partiell stetige t-Norm, d.h. zusätzlich gelte $\tau(a, \sup b_i) = \sup \tau(a, b_i)$, und sei $L \subseteq [0,1]$. Wir erhalten mit Hilfe der sogenannten $\tau$*- Konjunktion*

$$\omega_\tau(a, b) := \sup\{c \in L | \tau(a, c) \leq b\}$$

eine Fuzzy-Algebra $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow)$:

- $a \wedge b := \min(a, b)$
- $a \vee b := \max(a, b)$
- $a \cdot b := \tau(a, b)$
- $(a \rightarrow b) := \omega_\tau(a, b)$

Hier sind einige einfache Eigenschaften von $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow)$, die wir benötigen werden. Es sei dabei im folgenden $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow)$ stets eine Fuzzy-Algebra.

**2.2.3. Hilfssatz.** *Seien* $a, a_1, a_2, b \in L$.

1. $(L, \vee, \cdot)$ *ist geordnet, d.h.* $\vee$ *und* $\cdot$ *sind verträglich mit der Ordnung:*

$$a_1 \leq a_2 \Rightarrow a_1 \vee b \leq a_2 \vee b$$
$$a_1 \leq a_2 \Rightarrow a_1 \cdot b \leq a_2 \cdot b$$

2. *Die Null* $0 := \bigwedge L$ *im Halbring* $(L, \vee, \cdot)$*ist absorbierend:*

$$0 \cdot a = 0$$

[2]Umbreit verweist hierbei auf [We78]

*Beweis:*
1. Die Verträglichkeit von $\vee$ mit der Ordnung ist trivial, da $\vee$ der Supremum-Operator des Verbandes ist. Für die Multiplikation gilt:

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_2 \;\Leftrightarrow&\quad a_1 \vee a_2 = a_2 \\ \Rightarrow&\quad (a_1 \vee a_2) \cdot b = a_2 \cdot b \\ \Leftrightarrow&\quad a_1 \cdot b \vee a_2 \cdot b = a_2 \cdot b \\ \Leftrightarrow&\quad a_1 \cdot b \leq a_2 \cdot b \end{aligned}$$

2. Die Null ist wie angegeben, denn für alle $a \in L$ ist $a \vee \bigwedge L = a$. Weiter gilt: $0 \cdot 1 = 0$, da 1 das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist. Also folgt für jedes $a \in L$ wegen der Verträglichkeit von $\cdot$ mit der Ordnung: $0 \cdot a \leq 0 \cdot 1 = 0$. $\square$

Für den Pfeiloperator gilt folgende wichtige Aussage:

**2.2.4. Satz.** *Für $a, b, c \in L$ gilt:*

$$a \cdot b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \to c$$

*Beweis:* $b \to c$ ist definiert als das Supremum aller $a$ mit $a \cdot b \leq c$. Die Richtung „$\Rightarrow$“ gilt also nach Definition.
Sei nun $a \leq b \to c$. Dann ist $a \cdot b \leq (b \to c) \cdot b = (\bigvee\{\tilde{a} | \tilde{a} \cdot b \leq c\}) \cdot b$. Wegen der Distributivität ist letzteres aber gleich $\bigvee\{\tilde{a} \cdot b | \tilde{a} \cdot b \leq c\} \leq c$. Also gilt auch die Rückrichtung obiger Äquivalenz. $\square$

Mit Hilfe dieser Äquivalenz können wir für den Pfeiloperator weitere Eigenschaften beweisen:

**2.2.5. Hilfssatz.** *Seien $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c \in L$.*

1. $a \to b = 1 \Leftrightarrow a \leq b$
2. $1 \to a = a$
3. $a \to (b \to c) = (a \cdot b) \to c = b \to (a \to c)$
4. $b_1 \leq b_2$ *impliziert* $a \to b_1 \leq a \to b_2$ *und*
5. $a_1 \leq a_2$ *impliziert* $a_2 \to b \leq a_1 \to b$

*Beweis:* Diese Aussagen folgen alle aus 2.2.4:
1. Es gilt: $1 \leq a \to b \Leftrightarrow 1 \cdot a \leq b \Leftrightarrow a \leq b$
2. Dies folgt aus: $x \leq 1 \to a \Leftrightarrow x \cdot 1 \leq a \Leftrightarrow x \leq a$
3. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \leq a \to (b \to c) \;\Leftrightarrow&\quad x \cdot a \leq b \to c \\ \Leftrightarrow&\quad x \cdot a \cdot b \leq c \\ \Leftrightarrow&\quad x \leq (a \cdot b) \to c \end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit folgt aus der Kommutativität von $\cdot$.

4. Aus $b_1 \leq b_2$ und $x \leq a \to b_1$ folgt $x \cdot a \leq b_1 \leq b_2$ und weiter $x \leq a \to b_2$.
5. Sei $a_1 \leq a_2$. Dann folgt aus $x \leq a_2 \to b \Leftrightarrow x \cdot a_2 \leq b$ wegen der Verträglichkeit von $\cdot$ mit der Ordnung: $x \cdot a_1 \leq b \Leftrightarrow x \leq a_1 \to b$. □

Weiterhin ist der Pfeiloperator in folgendem Sinne verträglich mit den Infimum- und Supremum-Operatoren:

**2.2.6. Hilfssatz.** *Seien $a, a_i, b, b_i \in L$, $i \in I$, wobei $I$ eine beliebige Indexmenge ist. Dann gilt:*

1. $a \to (\bigwedge b_i) = \bigwedge (a \to b_i)$
2. $(\bigvee a_i) \to b = \bigwedge (a_i \to b)$
3. $\bigvee (a \to b_i) \leq a \to (\bigvee b_i)$
4. $\bigvee (a_i \to b) \leq (\bigwedge a_i) \to b$

*Beweis:* Auch diese Aussagen beweisen wir mit Hilfe von 2.2.4:
1. Für jedes $x \in L$ sind folgende Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned} x &\leq a \to (\bigwedge b_i) \\ x \cdot a &\leq \bigwedge b_i \\ x \cdot a &\leq b_i && \forall i \\ x &\leq a \to b_i && \forall i \\ x &\leq \bigwedge (a \to b_i) \end{aligned}$$

2. Dies beweisen wir ähnlich. Wir benötigen jedoch zusätzlich noch die Verträglichkeit von $\cdot$ und $\vee$ (Distributivität), welche wir ja in der Definition gefordert haben:

$$\begin{aligned} x &\leq (\bigvee a_i) \to b \\ x \cdot (\bigvee a_i) &\leq b \\ \bigvee (x \cdot a_i) &\leq b \\ x \cdot a_i &\leq b && \forall i \\ x &\leq a_i \to b && \forall i \\ x &\leq \bigwedge (a_i \to b) \end{aligned}$$

3. Jedes $b_i$, $i \in I$ ist kleiner als $\bigvee b_i$, also ist auch $a \to b_i \leq a \to (\bigvee b_i)$, woraus die Behauptung folgt.
4. Der Beweis dieser Aussage geht genauso einfach wie (3). □

Die Fuzzy-Algebra ist eine recht interessante Struktur, die in vielen Gebieten der unscharfen Mathematik Anwendungen findet. Zum Beispiel kann man eine Fuzzy-Algebra als *unscharfe Logik* interpretieren:

**2.2.7. Definition.** Wir ordnen jeder logischen Aussage $A$ einen *Quasiwahrheitswert* $[A] \in L$ zu. Dabei gelten für die Aussagen $A$, $B$ mit den Quasiwahrheitswerten $a := [A]$ und $b := [B]$:

- $[A \wedge B] := a \wedge b$
- $[A \vee B] := a \vee b$
- $[A \Rightarrow B] := a \to b$

Falls notwendig, kann man zusätzlich noch eine Negation wie folgt definieren:

- $[\neg A] := a \to 0$

Seien weiter $A_i$, $i \in I$ logische Aussagen (für eine beliebige Indexmenge $I$), mit den Quasiwahrheitswerten $a_i := [A_i]$, so können wir auch die logischen Quantoren „für alle" und „es existiert" einführen:

- $[\forall i \in I : A_i] := \bigwedge_{i \in I} a_i$
- $[\exists i \in I : A_i] := \bigvee_{i \in I} a_i$

Desweiteren ist es möglich, mit Hilfe der Fuzzy-Algebra einen unscharfen Potenzmengenverband über einer Grundmenge $X$ zu definieren:

**2.2.8. Definition.** Sei $X$ eine Grundmenge. Eine *$L$-Fuzzy-Teilmenge* $\mathcal{A}$ von $X$ ist definiert als eine Abbildung von $X$ nach $L$. Die Menge aller solchen Abbildungen $\mathfrak{P}_L(X) := L^X = \{\mathcal{A} : X \to L\}$ heißt die *$L$-Fuzzy-Potenzmenge* von $X$.

Führen wir den Quasiwahrheitswert der Aussage „$\mathcal{A}$ ist $L$-Fuzzy-Teilmenge von $\mathcal{B}$" für $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{P}_L(X)$ wie folgt ein

$$[\mathcal{A} \subseteq_L \mathcal{B}] := \bigwedge_{x \in X} (\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)),$$

so erhalten wir:

**2.2.9. Satz.** *$\mathfrak{P}_L(X)$ bildet zusammen mit der Ordnungsrelation*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} &:\Leftrightarrow [\mathcal{A} \subseteq_L \mathcal{B}] = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x), \forall x \in X. \end{aligned}$$

*einen vollständigen Verband. Schnitt und Vereinigung von L-Fuzzy-Mengen, d.h. Infimum und Supremum sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} (\bigcap \mathcal{A}_i)(x) &= \bigwedge \mathcal{A}_i(x) \\ (\bigcup \mathcal{A}_i)(x) &= \bigvee \mathcal{A}_i(x) \end{aligned}$$

*Beweis:* Zunächst gilt wegen 2.2.5(1):

$$\begin{aligned}[\mathcal{A} \subseteq_L \mathcal{B}] = 1 \Leftrightarrow \quad & 1 = \bigwedge_{x\in X} (\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x)) & \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x) & \forall x \in X \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{A}(x) \leq \mathcal{B}(x) & \forall x \in X\end{aligned}$$

Um zu verifizieren, daß $\subseteq$ eine Ordnungsrelation ist, rechnet man die Reflexivität, Antisymmetrie und die Transitivität nach. Diese folgen alle direkt aus der Definition und aus der Tatsache, daß $(L, \leq)$ eine geordnete Menge ist.
Da $(L, \wedge, \vee)$ der vollständige Verband zu $\leq$ ist, sind Schnitt und Vereinigung von $L$-Fuzzy-Mengen wie angegeben und deshalb ist auch $\mathfrak{P}_L(X)$ ein vollständiger Verband. □

Wir können $\mathfrak{P}_L(X)$ auch eine Halbmodulstruktur geben, indem wir das skalare Produkt

$$\cdot : L \times \mathfrak{P}_L(X) \to \mathfrak{P}_L(X) \text{ mit } (l \cdot \mathcal{A})(x) := l \cdot \mathcal{A}(x),$$

definieren. Dies werden wir ausnutzen, um Fuzzy-Teilmengen darzustellen.

**2.2.10. Hilfssatz.** *Sei $X$ Grundmenge. Dann ist $(\mathfrak{P}_L(X), \cup, \cdot)$ ein $L$-$\Sigma$-Halbmodul.*

*Beweis:* Dies ist durch einfaches Nachrechnen der Definition (siehe Seite 18) leicht einsehbar. Insbesondere ist $(\mathfrak{P}_L(X), \cup)$ ein $\Sigma$-Halbmodul. □

Für $a \in X$ definieren wir schließlich die einelementige Menge

$$a : X \to L, x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ falls } a = x \\ 0 \text{ sonst} \end{cases},$$

und können somit jede Fuzzy-Menge $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(X)$ als Linearkombination einelementiger Mengen darstellen:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{A}(x) \cdot x$$

Wir bezeichnen hierbei aus Gründen der besseren Lesbarkeit die einelementigen Mengen identisch mit den Elementen aus $X$. Sind keine Verwechslungen möglich, so schreiben wir oft auch $+$ anstatt $\cup$, und lassen meist den Punkt $\cdot$ für die skalare Multiplikation weg. Weiterhin können wir uns bei der Darstellung von $\mathcal{A}$ als Linearkombination auf den Träger von $\mathcal{A}$ beschränken, das heißt auf die Menge

$$T(\mathcal{A}) := \{x \in X | \mathcal{A}(x) \neq 0\}$$

Wir haben relativ kurz und trocken die Fuzzy-Algebra analysiert und deren Anwendung als unscharfe Logik oder zur Definition unscharfer Mengen betrachtet. Damit können wir nun ein nicht triviales Beispiel eines Verbandskontextes herleiten:

Einen Verbandskontext haben wir als eine Galoisverbindung zwischen zwei vollständigen Verbänden definiert. Als vollständige Verbände können wir nun – anstatt der Potenzmengen von $G$ und $M$ im klassischen Kontext – die $L$-Fuzzy-Potenzmengen verwenden. Wir benötigen daher lediglich eine Galoisverbindung zwischen $\mathfrak{P}_L(G)$ und $\mathfrak{P}_L(M)$.

**2.2.11. Satz.** *Seien $G$ und $M$ Mengen, und $\mathcal{R}$ eine $L$-Fuzzy-Relation zwischen $G$ und $M$, d.h. $R \in \mathfrak{P}_L(G \times M)$. Dann definieren folgende Abbildungen eine Galoisverbindung:*

$$\varphi : \mathfrak{P}_L(G) \to \mathfrak{P}_L(M) \ \mathit{mit}\ \varphi(\mathcal{A})(m) := \bigwedge_{g \in G} (\mathcal{A}(g) \to \mathcal{R}(g,m))$$
$$\psi : \mathfrak{P}_L(M) \to \mathfrak{P}_L(G) \ \mathit{mit}\ \psi(\mathcal{B})(g) := \bigwedge_{m \in M} (\mathcal{B}(m) \to \mathcal{R}(g,m))$$

*(Die Fuzzy-Menge $\varphi(\mathcal{A})$ ist eine Abbildung von $M$ nach $L$, wir definieren sie also, indem wir den Wert der Abbildung für beliebige $m \in M$ angeben. Auf die gleiche Weise ist auch die Definition von $\psi(\mathcal{B})$ zu verstehen.)*

*Beweis:* Wir zeigen: $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \varphi(\mathcal{A})$ (Kriterium 1.4.4).
Sei $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{B})$. Nach Definition von $\subseteq$ gilt dies genau dann, wenn für alle $g \in G$ die Ungleichung $\mathcal{A}(g) \leq \psi(\mathcal{B})(g)$ erfüllt ist. Setzen wir die Definition von $\psi$ ein, so gilt $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{B})$ genau dann, wenn für alle $g \in G$ und für alle $m \in M$ gilt:

$$\mathcal{A}(g) \leq \mathcal{B}(m) \to \mathcal{R}(g,m)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$\mathcal{A}(g) \cdot \mathcal{B}(m) \leq \mathcal{R}(g,m)$$

Aufgrund der Kommutativität von $\cdot$ kann man nun $\mathcal{A}(g)$ und $\mathcal{B}(m)$ vertauschen, und die Beweisschritte zurückverfolgen.

$$\mathcal{B}(m) \cdot \mathcal{A}(g) \leq \mathcal{R}(g,m)$$
$$\mathcal{B}(m) \leq \mathcal{A}(g) \to \mathcal{R}(g,m)$$

Verwenden wir die Definition von $\varphi$, so gelten obige Gleichungen genau dann, wenn für alle $m \in M$ gilt: $\mathcal{B}(m) \leq \varphi(\mathcal{A})(m)$. Dies ist schließlich nach Definition von $\subseteq$ äquivalent zu $\mathcal{B} \subseteq \varphi(\mathcal{A})$. $\square$

**2.2.12. Definition.** Seien $L$ eine Fuzzy-Algebra, $G$ und $M$ Mengen, sowie $\mathcal{R}$ eine $L$-Fuzzy-Relation zwischen $G$ und $M$, d.h. eine $L$-Fuzzy-Teilmenge von $G \times M$. Der *$L$-Fuzzy-Kontext* $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R})$ ist definiert als der Verbandskontext

$$\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R}) \ = (\mathfrak{P}_L(G), \mathfrak{P}_L(M), \varphi),$$

wobei $\varphi$ wie in 2.2.11 definiert ist.

**2.2.13. Beispiel.** Wir verwenden die Fuzzy-Algebra, welche mit Hilfe der Lukasiewicz-Norm $\tau(a, b) := \max(0, a + b - 1)$ (das ist eine in der Theorie unscharfer Mengen recht beliebte t-Norm) über der Menge $L = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ definiert ist:

- $a \wedge b := min(a, b)$
- $a \vee b := max(a, b)$
- $a \cdot b := max(0, a + b - 1)$
- $a \to b := min(1, 1 - a + b)$

Als Beispiel eines $L$-Fuzzy-Kontextes betrachten wir das Wetter einer Woche (entnommen aus [Um94], Seite 10): Gegenstände sind die Tage der Woche,

$$G := \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Sa}, \mathrm{So}\},$$

und wir betrachten die Merkmale warm, kalt, niederschlagsarm und windstill:

$$M := \{\mathrm{warm}, \mathrm{kalt}, \mathrm{nsarm}, \mathrm{windst}\}.$$

Der $L$-Fuzzy-Kontext ist dann durch die $L$-Fuzzy-Relation $\mathcal{R}$ zwischen $G$ und $M$ gegeben:

| $\mathcal{R}$ | warm | kalt | nsarm | windst |
|---|---|---|---|---|
| Mo | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 |
| Di | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Mi | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| Do | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 |
| Fr | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Sa | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| So | 0 | 1 | 1 | 1 |

Die Ableitung eines Tages gibt nun eine Beschreibung des Wetters an diesem Tag:

$$\mathrm{Mo}' = \frac{1}{2}\mathrm{warm} + \frac{1}{2}\mathrm{kalt} + \mathrm{nsarm} + \mathrm{windst}$$

d.h., am Montag war es zwar weder richtig warm, noch kalt, aber es war niederschlagsarm und windstill.

Nun kann man z.B. Fragen wie „War am Montag Badewetter¿‘ beantworten: Definiert man Badewetter als

$$\mathcal{B} := \text{warm} + \text{nsarm},$$

so kann man der Aussage „Montag war Badewetter“ den Quasiwahrheitswert $[\mathcal{B} \subseteq_L \text{Mo}']$ zuordnen, also

$$\bigwedge_{m \in M} (\mathcal{B}(m) \to \text{Mo}'(m)) = \frac{1}{2}$$

Will man fragen wie „An welchen Tagen dieser Woche war Badewetter¿‘ beantworten, so kann man effizienter $\mathcal{B}'$ betrachten:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= g \mapsto \bigwedge_{m \in M} (\mathcal{B}(m) \to \mathcal{R}(g, m)) \\ &= \frac{1}{2}\text{Mo} + \text{Di} + \frac{1}{2}\text{Mi}, \end{aligned}$$

d.h., am Dienstag war Badewetter, und Montag und Mittwoch zumindest noch „etwas“, während sich die anderen Tage dieser Woche sicher nicht zum Baden eigneten.

Eine weitere mögliche Fragestellung wäre, welche Tage sich zum Wandern eigneten. Zum Wandern muß es nicht unbedingt warm sein, obwohl es von Vorteil wäre. Aber es sollte zumindest keinen Niederschlag geben. Wir vereinbaren also als Wanderwetter:

$$\mathcal{W} := \frac{1}{2}\text{warm} + \text{nsarm}$$

und erhalten:

$$\mathcal{W}' = \text{Mo} + \text{Di} + \text{Mi} + \frac{1}{2}\text{Sa} + \frac{1}{2}\text{So}$$

Also eignen sich Montag, Dienstag und Mittwoch hervorragend zum Wandern, während am Donnerstag und Freitag dieser Woche von einer Wanderung abzuraten wäre.

## 2.3 Inzidenzrelationen

Der Erfolg der klassischen Kontexte ist zum großen Teil darauf zurückzuführen, daß man die Informationen nicht für alle Elemente der Potenzmengen von $G$ und $M$ kennen muß, welche sehr groß sein können, sondern lediglich auf den einelementigen Teilmengen von $G$ und $M$.

Auch beim $L$-Fuzzy-Kontext haben wir die Galoisabbildung nicht direkt für jedes $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(G)$ angegeben. Wir sind mit einer sehr viel kleineren Tabelle auf

$G \times M$ (der $L$-Fuzzy-Relation $\mathcal{R}$) ausgekommen, aus der wir dann $\varphi(\mathcal{A})$ für jedes $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(A)$ ablesen konnten.

Wir werden nun ein allgemeines Verfahren angeben, sodaß man mit möglichst wenig Daten (=Speicherplatz) einen Verbandskontext darstellen kann. Als Vorbild dient uns hierbei der klassische Kontext $(G, M, I)$ mit der Speicherung der Daten durch die sogenannte Inzidenzrelation $I \subseteq G \times M \subseteq \mathfrak{P}(G) \times \mathfrak{P}(M)$. Dies verallgemeinern wir auf vollständige Verbände: Wir werden zeigen, daß man die Daten nur für jeweils $\vee$-dichte Teilmengen $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ kennen muß, d.h. man kann den Kontext durch eine verallgemeinerte Inzidenzrelation $I \subseteq G \times M \subseteq X \times Y$ angeben.

Im Idealfall ist die Menge der $\vee$-irreduziblen Elemente $I^\vee(X)$ von $X$ $\vee$-dicht, und ebenso $I^\vee(Y)$. Dann nennen wir den Verbandskontext $\vee$-*erzeugt*.

**2.3.1. Beispiel.**

1. In einer Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$ ist die Menge der einelementigen Teilmengen $G \cong I^\vee(\mathfrak{P}(G)) = \{\{g\}|g \in G\}$ $\vee$-dicht. Also ist jeder Potenzmengenverband $\vee$-erzeugt.
2. Sind $X$ und $Y$ endliche Verbände, so heißt $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ auch *endlich*er Verbandskontext. Da in endlichen Verbänden die Menge der $\vee$-irreduziblen Elemente $\vee$-dicht ist (nach Satz 1.2.16), sind endliche Verbandskontexte $\vee$-erzeugt.
3. Sei $X$ Grundmenge und $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow)$ Fuzzy-Algebra. Ist $\bar{L} \subseteq L$ , so definieren wir:
$$\bar{L} \cdot X := \{l \cdot x \in \mathfrak{P}_L(X)|l \in \bar{L}, x \in X\}.$$
Ist $\bar{L}$ $\vee$-dicht in $L$, so auch $\bar{L} \cdot X$ in $\mathfrak{P}_L(X)$. Die Menge der $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}_L(X)$ ist:
$$I^\vee(\mathfrak{P}_L(X)) = I^\vee(L) \cdot X$$
(siehe Beweis). Die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}_L(X)$ sind also genau dann $\vee$-dicht, wenn es die $\vee$-irreduziblen Elemente von $L$ sind.
Weiter sind demnach $L$-Fuzzy-Kontexte genau dann $\vee$-erzeugt, wenn die $\vee$-irreduziblen Elemente von $L$ $\vee$-dicht sind.

*Beweis:*
a. Ist $\bar{L}$ $\vee$-dicht in $L$, so ist jedes $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(X)$ darstellbar als
$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \bigcup_{x \in T(\mathcal{A})} \mathcal{A}(x) \cdot x \\ &= \bigcup_{x \in T(\mathcal{A})} \Big( \bigvee_{l \in \bar{L}, l \leq \mathcal{A}(x)} l \Big) \cdot x \\ &= \bigcup \{l \cdot x \in \bar{L} \cdot X | l \leq \mathcal{A}(x)\},\end{aligned}$$
also ist auch $\bar{L} \cdot X$ $\vee$-dicht in $\mathfrak{P}_L(X)$.

b. Die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}_L(X)$ haben genau einen unteren Nachbarn. $\mathcal{B}$ ist unterer Nachbar von $\mathcal{A}$, genau dann, wenn es ein $x_0 \in X$ gibt, sodaß zum einen $\mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x)$ für alle $x \in X \setminus \{x_0\}$ gilt, und zum anderen $\mathcal{B}(x_0)$ unterer Nachbar von $\mathcal{A}(x_0)$ ist. Jedes $0 \neq l \in L$ hat mindestens einen unteren Nachbarn, also können höchstens Fuzzy-Teilmengen der Form $l \cdot x$ mit $l \in L$, $x \in X$ $\vee$-irreduzibel sein, und zwar genau dann, wenn auch $l$ $\vee$-irreduzibel ist. (Die leere Fuzzy-Menge $\emptyset : x \mapsto 0$ hat keinen unteren Nachbarn, alle anderen Fuzzy-Teilmengen mehr als einen.) $\square$

Klassische Kontexte $(G, M, I)$ gibt man meist als Kreuzchentabelle über die Grundmengen $G$ und $M$ an, indem man in Zeile $g \in G$ und Spalte $m \in M$ ein Kreuzchen setzt, falls $gIm$ gilt, d.h. falls $(g, m)$ in der Relation $I$ enthalten ist. $I$ wird in diesem Zusammenhang Inzidenzrelation genannt. Ähnlich kann man auch einen Verbandskontext durch eine Relation über $\vee$-dichte Teilmengen von $X$ und $Y$ definieren, doch ist hier nicht jede Relation erlaubt. Deshalb führen wir zunächst eine Verallgemeinerung der *Inzidenzrelation* ein:

**2.3.2. Definition.** Seien $X$ und $Y$ vollständige Verbände, und seien $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ $\vee$-dichte Teilmengen. Dann heißt eine Relation $I \subseteq G \times M$ *Inzidenzrelation* (bzgl. $X$ und $Y$) , falls für alle $g \in G$ und $m \in M$ mit

$$g^{\rightarrow} := \bigvee\{m \in M | (g, m) \in I\}$$
$$m^{\leftarrow} := \bigvee\{g \in G | (g, m) \in I\}$$

gelte:

$$m \leq g^{\rightarrow} \Rightarrow (g, m) \in I \quad \text{und} \quad g \leq m^{\leftarrow} \Rightarrow (g, m) \in I$$

**2.3.3. Bemerkung.**

1. Für alle $g \in G$ und alle $m \in M$gilt:

$$m \leq g^{\rightarrow} \Leftrightarrow g \leq m^{\leftarrow}.$$

2. Die Abbildungen $-^{\rightarrow} : G \to Y$ und $-^{\leftarrow} : M \to X$ sind antiton.

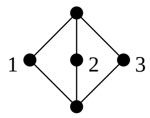
*Beweis:*
1. In der Inzidenzrelation $I$ gilt:

$$m \leq g^{\rightarrow} \Leftrightarrow (g, m) \in I \Leftrightarrow g \leq m^{\leftarrow}$$

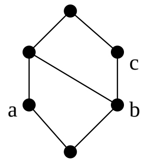
2. Sei $g_1, g_2 \in G$, mit $g_1 \leq g_2$. Dann gilt für jedes $m \in M$:

$$m \leq g_2^{\rightarrow} \Rightarrow g_2 \leq m^{\leftarrow} \Rightarrow g_1 \leq m^{\leftarrow} \Rightarrow m \leq g_1^{\rightarrow}.$$

Also folgt mit Hilfe der $\vee$-Dichtheit von $M$ aus $y \leq g_2^{\rightarrow} \Rightarrow m \leq g_2^{\rightarrow}, \forall m \leq y$ $\Rightarrow m \leq g_1^{\rightarrow}, \forall m \leq y \Rightarrow y = \bigvee\{m \in M | m \leq y\} \leq g_1^{\rightarrow}$.
Die Antitonie von $-^{\leftarrow}$ zeigt man analog. $\square$




X




Y

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| 1 | X | X | |
| 2 | | X | X |
| 3 | | X | |

I

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| 1 | X | X | |
| 2 | | | X |
| 3 | | X | |

J

Abbildung 2.1: $I$ ist Inzidenzrelation bzgl. den Verbänden $X$ und $Y$ , aber $J$ nicht.

**2.3.4. Beispiel.**

1. In Abbildung 2.1 sind zwei Verbände $X$ und $Y$ mit den $\vee$-dichten Teilmengen $G = \{1, 2, 3\}$ von $X$ und $M = \{a, b, c\}$ von $Y$ angegeben, sowie eine Inzidenzrelation $I$ und eine Relation $J$ zwischen $G$ und $M$. $J$ ist keine Inzidenzrelation, denn es ist: $b \leq c = 2^{\rightharpoondown}$, aber $(2, b) \notin J$.
2. Seien $X = \mathfrak{P}(G)$ und $Y = \mathfrak{P}(M)$ Potenzmengen. Dann ist jede Relation $I \subseteq I^{\vee}(\mathfrak{P}(G)) \times I^{\vee}(\mathfrak{P}(M)) \cong G \times M$ eine Inzidenzrelation bzgl. $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(M)$, denn aus $\{g\} \subseteq \{m\}^{\rightharpoondown} = \{g \in G | (\{g\}, \{m\}) \in I\}$ folgt trivialerweise $(\{g\}, \{m\}) \in I$.

Wir betrachten nun den Zusammenhang der Inzidenzrelationen mit den Galoisabbildungen:

**2.3.5. Definition.** Seien $X$ und $Y$ vollständige Verbände, sowie $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ jeweils $\vee$-dicht.

1. Ist $\varphi : X \to Y$ Galoisabbildung, so heißt
$$\begin{aligned} \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi) \subseteq G \times M \qquad & \text{mit} \\ (g, m) \in \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi) :\Leftrightarrow m \leq \varphi(g) & \end{aligned}$$
die Inzidenzrelation zu $\varphi$ (auf $G \times M$).
2. Ist $I \subseteq G \times M$ eine Inzidenzrelation, so heißt
$$\begin{aligned} \mathrm{GA}_{X,Y}(I) \colon X \to Y \qquad & \text{mit} \\ \mathrm{GA}_{X,Y}(I)(x) := \bigwedge \{g^{\rightharpoondown} | g \in G, g \leq x\} & \end{aligned}$$
die Galoisabbildung zu $I$ (zwischen $X$ und $Y$).

Wir haben bis jetzt noch nicht gezeigt, daß $\mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ wirklich eine Inzidenzrelation ist, und daß $\mathrm{GA}_{X,Y}(I)$ wirklich eine Galoisabbildung definiert. Diese Wohldefiniertheit zeigen wir mit im Beweis des folgenden Satzes:

**2.3.6. Satz.** *Seien $X, Y, G, M$ wie in 2.3.5. Dann sind $\mathrm{IR}_{G,M}$ und $\mathrm{GA}_{X,Y}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen der Menge der Galoisabbildungen von $X$ nach $Y$, und der Menge aller Inzidenzrelation auf $G \times M$.*

*Beweis:*
1. Sei $\varphi\colon X \to Y$ Galoisabbildung. Zeige, daß $I := \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ Inzidenzrelation ist:
Seien $g \in G$ und $m \in M$ beliebig. Dann ist $g^{\rightarrow} = \bigvee\{m \in M | m \leq \varphi(g)\} \leq \varphi(g)$, also folgt aus $m \leq g^{\rightarrow} \Rightarrow m \leq \varphi(g) \Rightarrow (g,m) \in I$.
Weiter ist $m^{\leftarrow} = \bigvee\{g \in G | m \leq \varphi(g)\} \leq \varphi^d(m)$ ($m \leq \varphi(g)$ ist äquivalent zu $g \leq \varphi^d(m)$ nach 1.4.2). Es folgt wieder aus $g \leq m^{\leftarrow} \Rightarrow g \leq \varphi^d(m) \Rightarrow m \leq \varphi(g)$ $\Rightarrow (g,m) \in I$.
2. Sei $I \subseteq G \times M$ Inzidenzrelation. Wir zeigen mit Hilfe der $\vee$-Dichtheit von $G$ und $M$, daß mit

$$\begin{aligned} \varphi := \mathrm{GA}_{X,Y}(I)\colon x &\mapsto \bigwedge\{g^{\rightarrow} | g \in G, g \leq x\} \quad \text{und} \\ \psi\colon y &\mapsto \bigwedge\{m^{\leftarrow} | m \in M, m \leq y\} \end{aligned}$$

eine Galoisverbindung gegeben ist. Für alle $x \in X$ und $y \in Y$ sind nämlich folgende Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned} x &\leq \psi(y) \\ \bigvee\{g \in G | g \leq x\} &\leq \bigwedge\{m^{\leftarrow} | m \in M, m \leq y\} \\ g &\leq m^{\leftarrow} \qquad \forall g \in G : g \leq x,\ \forall m \in M : m \leq y \\ m &\leq g^{\rightarrow} \qquad \forall g \in G : g \leq x,\ \forall m \in M : m \leq y \\ \bigvee\{m \in M | m \leq y\} &\leq \bigwedge\{g^{\rightarrow} | g \in G : g \leq x\} \\ y &\leq \varphi(x) \end{aligned}$$

3. Sei $\varphi : X \to Y$ Galoisabbildung, und $I := \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ die zugehörige Inzidenzrelation. Wegen der $\vee$-Dichtheit von $M$ gilt für jedes $g \in G$:

$$g^{\rightarrow} = \bigvee\{m \in M | m \leq \varphi(g)\} = \varphi(g).$$

Da $\varphi$ Galoisverbindung ist (1.4.7), und wegen der $\vee$-Dichtheit von $G$ gilt damit für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} \mathrm{GA}_{X,Y}(I)(x) &= \bigwedge\{g^{\rightarrow} | g \in G, g \leq x\} \\ &= \bigwedge\{\varphi(g) | g \in G, g \leq x\} \\ &= \varphi(\bigvee\{g \in G | g \leq x\}) \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

d.h. $\mathrm{GA}_{X,Y}(\mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)) = \varphi$.
4. Ist andererseits $I \subseteq G \times M$ eine Inzidenzrelation und $\varphi := \mathrm{GA}_{X,Y}(I)$, so gilt wegen der Antitonie von $-^{\rightarrow}$ für alle $g \in G$:

$$\varphi(g) = \bigwedge\{\tilde{g}^{\rightarrow} | \tilde{g} \in G, \tilde{g} \leq g\} = g^{\rightarrow}.$$

Damit folgt für $(g,m) \in G \times M$:

$$(g,m) \in \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi) \Leftrightarrow m \leq \varphi(g) \Leftrightarrow m \leq g^{\rightarrow} \Leftrightarrow (g,m) \in I,$$

d.h. $\mathrm{IR}_{G,M}(\mathrm{GA}_{X,Y}(I)) = I$. □

Man kann also jede Galoisabbildung $\varphi$ zwischen vollständigen Verbänden $X$ und $Y$ – und damit jeden Verbandskontext $(X,Y,\varphi)$ – durch eine Kreuzchentabelle darstellen, wie es bei klassischen Kontexten üblich ist. Als Zeileneinträge nimmt man eine (möglichst kleine) $\vee$-dichte Teilmenge $G$ von $X$ , und als Spalteneinträge eine $\vee$-dichte Teilmenge $M$ von $Y$ – meistens jeweils die $\vee$-irreduziblen Elemente. In die Zelle $(g,m)$ kommt genau dann ein Eintrag, wenn $m \leq \varphi(g)$ ist. Die Ableitungen sind dann aus der Kreuzchentabelle ablesbar: $x' = \bigwedge\{g^{\rightarrow} | g \leq x\}$ und $y' = \bigwedge\{m^{\leftarrow} | m \leq y\}$.

**2.3.7. Beispiel.**

1. Sei $\mathbb{K} = (\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(M), \varphi)$ Potenzmengenkontext. Dann ist $(G, M, \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi))$ der zugehörige klassische Kontext, den wir auch schon in Beispiel 2.1.3 betrachtet haben.
2. Sei $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R}) = (\mathfrak{P}_L(G), \mathfrak{P}_L(M), \varphi)$ ein $L$-Fuzzy-Kontext und sei $\bar{L}$ $\vee$-dicht in $L$. Setzen wir $\tilde{G} := \bar{L} \cdot G$ und $\tilde{M} := \bar{L} \cdot M$, so ist die zugehörige Inzidenzrelation $\mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi)$ eine binäre Relation zwischen $\tilde{G}$ und $\tilde{M}$, mit

$$(l_g \cdot g, l_m \cdot m) \in \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi) \Leftrightarrow l_g \cdot l_m \leq \mathcal{R}(g,m)$$

(Wobei $g \in G, m \in M$ und $l_g, l_m \in \bar{L}$ sind.) Umbreit führt in [Um94] eine ähnliche Relation unter dem Namen „*doppelte Skalierung*" ein.

*Beweis:* $\tilde{G} \subseteq \mathfrak{P}_L(G)$ und $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}_L(M)$ sind jeweils $\vee$-dicht, wie wir in 2.3.1(3) gezeigt haben. Wir haben $\mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi)$ mit folgender Definition eingeführt:

$$(l_g \cdot g, l_m \cdot m) \in \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi) :\Leftrightarrow l_m \cdot m \subseteq \varphi(l_g \cdot g)$$

Wir zeigen nun, daß diese Bedingung äquivalent zu obiger ist: Setzen wir die Definition von $\subseteq$ ein, so erhalten wir die Bedingung:

$$\forall n \in M : \ (l_m \cdot m)(n) \leq \varphi(l_g \cdot g)(n)$$

Diese Ungleichungen sind aber für $n \neq m$ immer erfüllt, weil $(l_m \cdot m)(n) = 0$ nach Definition der einelementigen Fuzzy-Menge $m \in \mathfrak{P}_L(M)$ ist. Desweiteren ist $(l_m \cdot m)(m) = l_m$, also vereinfacht sich die Bedingung zu:

$$l_m \leq \varphi(l_g \cdot g)(m)$$

Dies können wir mit Hilfe der Definition von $\varphi$ weiter umformen in:

$$\begin{aligned} l_m &\leq \bigwedge_{h \in G} ((l_g \cdot g)(h) \rightarrow \mathcal{R}(h,m)) \\ l_m \cdot (l_g \cdot g)(h) &\leq \mathcal{R}(h,m) \qquad \forall h \in G \\ l_m \cdot l_g &\leq \mathcal{R}(g,m) \end{aligned}$$

□

3. Betrachten wir das Beispiel 2.2.13 (auf Seite 29): Die $\vee$-irreduziblen Elemente $\bar{L} := I^{\vee}(L) = \{\frac{1}{2}, 1\}$ sind $\vee$-dicht in $L$, also ist $\mathbb{K}$ $\vee$-erzeugt. $\vee$-Irreduzibel in $\mathfrak{P}_L(G)$ bzw. $\mathfrak{P}_L(M)$ sind:

$$\tilde{G} := \bar{L} \cdot G = \{\frac{1}{2}\mathrm{Mo}, \mathrm{Mo}, \frac{1}{2}\mathrm{Di}, \mathrm{Di}, \ldots\} \text{ und}$$
$$\tilde{M} := \bar{L} \cdot M = \{\frac{1}{2}\mathrm{warm}, \mathrm{warm}, \frac{1}{2}\mathrm{kalt}, \mathrm{kalt}, \ldots\}.$$

Wir können also $\mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi)$ in Form der folgenden Kreuzchentabelle angeben:

| | $\frac{1}{2}$ warm | warm | $\frac{1}{2}$ kalt | kalt | $\frac{1}{2}$ nsarm | nsarm | $\frac{1}{2}$ windst | windst |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ Mo | × | × | × | × | × | × | × | × |
| Mo | × | | × | | × | × | × | × |
| $\frac{1}{2}$ Di | × | × | × | | × | × | × | × |
| Di | × | × | | | × | × | × | × |
| $\frac{1}{2}$ Mi | × | × | × | × | × | × | × | |
| Mi | × | | × | | × | × | | |
| $\frac{1}{2}$ Do | × | × | × | × | × | | × | |
| Do | × | | × | | | | | |
| $\frac{1}{2}$ Fr | × | | × | × | × | | × | |
| Fr | | | × | × | | | | |
| $\frac{1}{2}$ Sa | × | | × | × | × | × | × | |
| Sa | | | × | × | × | | | |
| $\frac{1}{2}$ So | × | | × | × | × | × | × | × |
| So | | | × | × | × | × | × | × |

Dies bringt uns zwar nicht unbedingt eine sparsamere Darstellung des Fuzzy-Kontextes – Fuzzy-Kontexte konnten wir bereits mit Fuzzy-Relationen sehr gut darstellen. Aber auch hier ist dieses Verfahren sinnvoll, weil wir dadurch, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, einen isomorphen klassischen Kontext definiert haben.

## 2.4 Inzidenzisomorphe Kontexte

Es liegt nun die Vermutung nahe, daß der Begriffsverband eines Verbandskontextes $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ isomorph zum Begriffsverband des klassischen Kontextes mit Inzidenzrelation $I = \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ ist, wobei respektive $G$ und $M$ $\vee$-dichte Teilmengen von $X$ und $Y$ sind. Dies werden wir in diesem Kapitel zeigen, indem wir eine

Relation zwischen Verbandskontexten definieren, welche auf $\mathrm{IR}_{G,M}(\mathbb{K})$ basiert – die *Inzidenzisomorphie*.

Hierzu führen wir zunächst Isomorphismen zwischen Inzidenzrelationen ein:

**2.4.1. Definition.** Für $i = 1, 2$ seien $X_i$ und $Y_i$ vollständige Verbände, $G_i \subseteq X_i$, $M_i \subseteq Y_i$ jeweils $\vee$-dichte Teilmengen, und $I_i \subseteq G_i \times M_i$ Inzidenzrelationen. Dann heißen $I_1$ *und* $I_2$ *isomorph*, kurz $I_1 \cong I_2$, falls es zwei Bijektionen $\gamma_X : G_1 \to G_2$ und $\gamma_Y : M_1 \to M_2$ gibt, sodaß

$$(g, m) \in I_1 \Leftrightarrow (\gamma_X(g), \gamma_Y(m)) \in I_2.$$

Wir nennen in diesem Fall $\gamma := (\gamma_X, \gamma_Y)$ *Inzidenzisomorphismus.*

**2.4.2. Beispiel.** Seien $X$ und $Y$ vollständige Verbände, $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ $\vee$-dicht und $I \subseteq G \times M$ eine Inzidenzrelation. Betrachte die Potenzmengenverbände $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(M)$, und die Inzidenzrelation $I_* \subseteq I^{\vee}(\mathfrak{P}(G)) \times I^{\vee}(\mathfrak{P}(M))$ zwischen den einelementigen Mengen aus $G$ und $M$, mit

$$(\{g\}, \{m\}) \in I_* :\Leftrightarrow (g, m) \in I.$$

Dann sind die beiden Inzidenzrelationen $I$ und $I_*$ isomorph.

*Beweis:* Die Bijektionen $\gamma_X$ und $\gamma_Y$ sind gegeben durch die Abbildungsvorschriften $g \mapsto \{g\}$ bzw. $m \mapsto \{m\}$. □

Mit Hilfe der Isomorphie von Inzidenzrelationen führen wir jetzt die Inzidenzisomorphie für $\vee$-erzeugte Verbandskontexte ein:

**2.4.3. Definition.** Seien $\mathbb{K}_1 = (X_1, Y_1, \varphi_1)$ und $\mathbb{K}_2 = (X_2, Y_2, \varphi_2)$ Verbandskontexte. Dann heißen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ *inzidenzisomorph*, falls es $\vee$-dichte Teilmengen $G_i \subseteq X_i$ und $M_i \subseteq Y_i$ $(i = 1, 2)$ gibt, sodaß die Inzidenzrelationen zu $\varphi_i$ isomorph sind, d.h.

$$\mathrm{IR}_{G_1,M_1}(\varphi_1) \cong \mathrm{IR}_{G_2,M_2}(\varphi_2).$$

Mit Hilfe des zugehörigen Inzidenzisomorphismus $\gamma = (\gamma_X, \gamma_Y)$ definieren wir dann zwei neue Funktionen $\mu_X : X_1 \to X_2$ und $\mu_Y : Y_1 \to Y_2$ wie folgt:

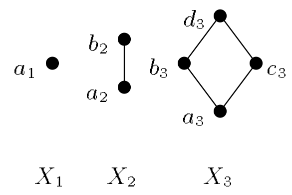
$$\mu_X(x) := \bigvee\{\gamma_X(g) | g \in G_1, g \leq x\}$$
$$\mu_Y(y) := \bigvee\{\gamma_Y(m) | m \in M_1, m \leq y\}$$

Wir bezeichnen $\mu := (\mu_X, \mu_Y)$ als *Begriffsisomorphismus* zwischen $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$.

**2.4.4. Bemerkung.**

1. Achtung: Es kann Elemente $g_1, g_2 \in G$ geben, mit $g_1 \leq g_2$, aber $\gamma_X(g_1) \not\leq \gamma_X(g_2)$. Dann ist $\mu_X(g_2) \geq \gamma_X(g_1) \vee \gamma_X(g_2) > \gamma_X(g_2)$. Es gilt also insbesondere *nicht:* $\mu_X(g) = \gamma_X(g)$.

2. Die Inzidenzisomorphie ist nicht transitiv:
   Seien beispielsweise $X_1, X_2, X_3$ die rechts abgebildeten Verbände, und sei weiter $Y$ ein beliebiger vollständiger Verband mit der $\vee$-dichten Teilmenge $M \subseteq Y$. Wir betrachten die Kontexte $\mathbb{K}_i := (X_i, Y, \varphi_i)$ für gewisse $\varphi_i$ $(i = 1, 2, 3)$.




   Es gibt isomorphe, jeweils $\vee$-dichte Teilmengen $G_1 := \{a_1\} \subseteq X_1$, sowie $G_2 := \{b_2\} \subseteq X_2$, also sind die zwei Verbandskontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ inzidenzisomorph, wenn für alle $m \in M$ gilt: $m \leq \varphi_1(a_1) \Leftrightarrow m \leq \varphi_2(b_2)$. Weiter gibt es isomorphe $\vee$-dichte Teilmengen $G_2' := \{a_2, b_2\} \subseteq X_2$ und $G_3 := \{b_3, c_3\} \subseteq X_3$. Also sind auch $\mathbb{K}_2$ und $\mathbb{K}_3$ inzidenzisomorph, wenn für alle $m \in M$ gilt: $m \leq \varphi_2(a_2) \Leftrightarrow m \leq \varphi_3(b_3)$ und $m \leq \varphi_2(b_2) \Leftrightarrow m \leq \varphi_3(c_3)$. $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_3$ sind aber unter keinen Umständen inzidenzisomorph, denn es gibt keine $\vee$-dichte Teilmenge von $X_3$, welche isomorph zu einer $\vee$-dichten Teilmenge von $X_1$ ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß der Begriffsisomorphismus seinem Namen gerecht wird, d.h. daß er ein Isomorphismus zwischen den Begriffsverbänden $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$ ist.

Weil folgende Ungleichungen gleich mehrmals benötigt werden, formulieren wir sie in einem Hilfssatz:

**2.4.5. Hilfssatz.** *Seien* $\mathbb{K}_1 = (X_1, Y_1, \varphi_1)$ *und* $\mathbb{K}_2 = (X_2, Y_2, \varphi_2)$ *inzidenzisomorphe Verbandskontexte. Weiter sei* $\gamma = (\gamma_X, \gamma_Y)$ *der Inzidenzisomorphismus zwischen den entsprechenden Inzidenzrelationen* $\mathrm{IR}_{G_1,M_1}(\varphi_1)$ *und* $\mathrm{IR}_{G_2,M_2}(\varphi_2)$, *sowie* $\mu = (\mu_X, \mu_Y)$ *der zugehörige Begriffsisomorphismus.*
*Dann gilt für alle* $g \in G_1$, $m \in M_1$ *und für alle* $x \in X_1$, $y \in Y_1$*:*

$$g \leq y' \Leftrightarrow \gamma_X(g) \leq \mu_Y(y)'$$
$$m \leq x' \Leftrightarrow \gamma_Y(m) \leq \mu_X(x)'$$

*Beweis:*
1. Für alle $g \in G_1$ und $m \in M_1$ gilt $g \leq m' \Leftrightarrow \gamma_X(g) \leq \gamma_Y(m)'$:
$g \leq m'$ ist äquivalent zu $(g, m) \in \mathrm{IR}_{G_1,M_1}(\mathbb{K}_1)$ und dies wegen der Definition des Inzidenzisomorphismus $\gamma$ widerum zu $(\gamma_X(g), \gamma_Y(m)) \in \mathrm{IR}_{G_2,M_2}(\mathbb{K}_2)$, also zu $\gamma_X(g) \leq \gamma_Y(m)'$.

2. Für alle $g \in G_1$ und $y \in Y_1$ sind äquivalent:

$$\begin{aligned}
g &\leq y' \\
g &\leq (\bigvee\{m \in M_1 | m \leq y\})' \\
g &\leq \bigwedge\{m' | m \in M_1, m \leq y\} \\
g &\leq m' \qquad \forall m \in M_1 \text{ mit } m \leq y \\
\gamma_X(g) &\leq \gamma_Y(m)' \qquad \forall m \in M_1 \text{ mit } m \leq y \\
\gamma_X(g) &\leq \bigwedge\{\gamma_Y(m)' | m \in M_1, m \leq y\} \\
\gamma_X(g) &\leq (\bigvee\{\gamma_Y(m) | m \in M_1, m \leq y\})' \\
\gamma_X(g) &\leq \mu_Y(y)'
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung zeigt man analog. □

**2.4.6. Satz.** *Seien $\mathbb{K}_i = (X_i, Y_i, \varphi_i)$, $G_i$, $M_i$ $(i = 1, 2)$, sowie $\gamma$ und $\mu$ wie in 2.4.5. Dann sind die Ableitungen der Kontexte verträglich mit $\mu$, d.h. für $x \in X_1$ und $y \in Y_1$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\mu_X(x)' &= \mu_Y(x') \\
\mu_Y(y)' &= \mu_X(y')
\end{aligned}$$

*Beweis:* Betrachten wir $\mu_X(x)'$:
Dies ist wegen der $\vee$-Dichtheit von $M_2$ gleich $\bigvee\{m_2 \in M_2 | m_2 \leq \mu_X(x)'\}$. Da $\gamma_Y : M_1 \to M_2$ bijektiv ist, gibt es zu jedem $m_2 \in M_2$ genau ein $m \in M_1$ mit $\gamma_Y(m) = m_2$. Weiter gilt nach 2.4.5: $\gamma_Y(m) \leq \mu_X(x)' \Leftrightarrow m \leq x'$. Insgesamt haben wir also: $\mu_X(x)' = \bigvee\{\gamma_Y(m) | m \in M_1, m \leq x'\} = \mu_Y(x')$. □

**2.4.7. Folgerung.** $\mu : X_1 \times Y_1 \to X_2 \times Y_2$ bildet Begriffe auf Begriffe ab.

*Beweis:* Sei $(x, y) \in \mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ ein Begriff. Dann ist $x' = y$ und $y' = x$. Also gilt für $\mu(x, y) = (\mu_X(x), \mu_Y(y))$: $\mu_X(x)' = \mu_Y(x') = \mu_Y(y)$ und $\mu_Y(y)' = \mu_X(y') = \mu_X(x)$. □

**2.4.8. Satz.** *Seien $\mathbb{K}_i = (X_i, Y_i, \varphi_i)$, $G_i$, $M_i$ $(i = 1, 2)$, sowie $\gamma$ und $\mu$ wie in 2.4.5. Dann ist $\mu$ ein Ordnungsisomorphismus zwischen $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$, die Kontexte $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ sind also isomorph.*

*Beweis:*
1. Wir zeigen zunächst: Für $x_1, x_2 \in \varphi_1^d(Y_1) \subseteq X_1$ gilt

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \mu_X(x_1) \leq \mu_X(x_2):$$

$x_1$ läßt sich als $\bigvee\{g \in G_1 | g \leq x_1\}$ darstellen, und für $x_2$ gilt: $x_2'' = x_2$. Also ist $x_1 \leq x_2$ äquivalent zu $g \leq x_2''$ für alle $g \in G_1$ mit $g \leq x_1$. Hier können wir nun 2.4.5 anwenden und erhalten $\gamma_X(g) \leq \mu_Y(x_2')'$ für die gleichen $g$. Supremumbildung der

linken Seiten, sowie 2.4.6 führen zu $\mu_X(x_1) \leq \mu_Y(x_2')' = \mu_X(x_2'') = \mu_X(x_2)$. Die Beweisschritte sind umkehrbar, also gilt die Äquivalenz.
2. Die Bijektivität von $\mu_X : \varphi_1^d(Y_1) \to \varphi_2^d(Y_2)$ folgt aus der Symmetrie der Definition:
Falls $\mathbb{K}_1 \cong \mathbb{K}_2$ ist, so auch $\mathbb{K}_2 \cong \mathbb{K}_1$, man hat also neben $\mu_X : X_1 \to X_2$ eine weitere Funktion $\nu_X : X_2 \to X_1$:

$$\nu_X(x) := \bigvee\{\gamma_X^{-1}(g) | g \in M_2, g \leq x\}.$$

Nach 2.4.7 ist $\mu_X(\varphi_1^d(Y_1)) \subseteq \varphi_2^d(Y_2)$ und $\nu_X(\varphi_2^d(Y_2)) \subseteq \varphi_1^d(Y_1)$. Wir zeigen noch für $x \in \varphi_1^d(Y_1)$, daß $\nu_X(\mu_X(x)) = x$ ist:
Zunächst gilt für jeden Begriffsumfang $x \in \varphi_1^d(Y_1)$: $x'' = x$. Also ist $\nu_X(\mu_X(x)) = \nu_X(\mu_X(x'')) = \nu_X(\mu_Y(x')')$ wegen 2.4.6. Nach Definition von $\nu_X$ ist letzteres gleich $\bigvee\{\gamma_X^{-1}(g) | g \in G_2, g \leq \mu_Y(x')'\} = \bigvee\{g \in G_1 | \gamma_X(g) \leq \mu_Y(x')'\}$. Wenden wir Hilfssatz 2.4.5 auf die Bedingung dieser Menge an $(\gamma_X(g) \leq \mu_Y(x')' \Leftrightarrow g \leq x'' = x)$, so ist $\nu_X(\mu_X(x)) = \bigvee\{g \in G_1 | g \leq x\} = x$.
Aus Symmetriegründen ist auch $\mu_X(\nu_X(x)) = x$ für $x \in \varphi_2^d(Y_2)$.
3. Wegen (1) und (2) ist $\mu_X : \varphi_1^d(Y_1) \to \varphi_2^d(Y_2)$ ein Ordnungsisomorphismus. Weiterhin haben wir die Ordnungsisomorphismen $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1) \to \varphi_1^d(Y_1), (x,y) \mapsto x$ und $\varphi_2^d(Y_2) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}_2), x \mapsto (x, x')$. Falls also folgendes Diagramm kommutiert, so ist $\mu = (\mu_X, \mu_Y) : \mathfrak{B}(\mathbb{K}_1) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}_2), (x,y) \mapsto (\mu_X(x), \mu_Y(y))$ auch Ordnungsisomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1) \arrow[r, "(x,y)\mapsto\mu(x,y)"] \arrow[d, "(x,y)\mapsto x"'] & \mathfrak{B}(\mathbb{K}_2) \\
\varphi_1^d(Y_1) \arrow[r, "x\mapsto\mu_X(x)"'] & \varphi_2^d(Y_2) \arrow[u, "x\mapsto(x,x')"']
\end{tikzcd}$$

Dies kommutiert aber wegen 2.4.6:

$$(\mu_X(x), \mu_X(x)') = (\mu_X(x), \mu_Y(x')) = (\mu_X(x), \mu_Y(y)) = \mu(x,y). \qquad \square$$

Eine direkte Folgerung daraus ist, daß die Verbandsstrukturen von $X$ und $Y$ unwichtig sind, wenn man eine Inzidenzrelation kennt. Das heißt, der Potenzmengenkontext über den $\vee$-dichten Teilmengen $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ hat einen isomorphen Begriffsverband:

**2.4.9. Folgerung.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext, und seien $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ jeweils $\vee$-dicht. Dann ist $\mathbb{K}$ isomorph zum klassischen Kontext

$$\mathbb{K}_* := (G, M, \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)).$$

Man kann also die bereits vorhandenen Algorithmen zur Erzeugung des Begriffsverbandes eines klassischen Kontextes auch für allgemeine Verbandskontexte nutzen, indem man sie auf $\mathbb{K}_*$ anwendet. Ein Computerprogramm, das solche Algorithmen zur Verfügung stellt, wird beispielsweise in [Boe97] vorgestellt.

**2.4.10. Beispiel.** Der Begriffsverband des $L$-Fuzzy-Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R})$ aus Beispiel 2.2.13 ist also isomorph zum Begriffsverband des klassischen Kontextes $(\tilde{G}, \tilde{M}, \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi))$ (siehe Beispiel 2.3.7(3)).

## 2.5 Reduzierter Kontext

Aus der klassischen Begriffsanalyse kennen wir Algorithmen zur Bereinigung und Reduzierung eines Kontextes (siehe [GaWi96]). Diese erzeugen zu einem klassischen Kontext einen kleineren Kontext (mit weniger Gegenständen und weniger Merkmalen) mit isomorphem Begriffsverband: Beim Bereinigen eines Kontextes werden Gegenstände bzw. Merkmale zusammengefaßt, die die gleiche Ableitung haben, und beim Reduzieren werden Gegenstände/Merkmale weggelassen, deren Begriffe nicht $\vee$- bzw. $\wedge$-irreduzibel sind. Dadurch erhält man einen Kontext, der leichter und effizienter zu analysieren ist.

Etwas Vergleichbares kann man aufgrund des folgenden Satzes auch für Verbandskontexte einführen:

**2.5.1. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext, und seien $\bar{X} \subseteq X$ und $\bar{Y} \subseteq Y$ $\vee$-Unterhalbverbände, sodaß gilt:*

$$\varphi^d(Y) \subseteq \bar{X} \text{ und } \varphi(X) \subseteq \bar{Y}.$$

*Dann sind die Kontexte $\mathbb{K}$ und $\overline{\mathbb{K}} := (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\varphi})$ mit $\bar{\varphi} : \bar{X} \to \bar{Y}, x \mapsto \varphi(x)$ isomorph.*

*Beweis:* Die Abbildung $\bar{\varphi}$ ist eine Galoisabbildung und für die Dualadjungierte $\bar{\varphi}^d$ gilt (mit $y \in \bar{Y}$)

$$\bar{\varphi}^d(y) = \varphi^d(y):$$

Für $x \in \bar{X}$ und $y \in \bar{Y}$ ist $\bar{\varphi}(x) \leq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leq y \Leftrightarrow \varphi^d(y) \leq x$. Definieren wir also $\psi : \bar{Y} \to \bar{X}, y \mapsto \varphi^d(y)$, so ist nach 1.4.2 $(\bar{\varphi}, \psi)$ Galoisabbildung.
Weiter ist $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \cong \varphi^d(Y)$. Da $\varphi(X) \subseteq \bar{Y} \subseteq Y$, und weil $\varphi^d(\varphi(X)) = \varphi^d(Y)$ ist, gilt $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \cong \varphi^d(Y) = \varphi^d(\bar{Y}) \cong \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{K}})$. □

Streng genommen ist die Galoisabbildung $\bar{\varphi}$ des Kontextes $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\varphi})$ ungleich $\varphi$. Die beiden Abbildungen haben nämlich unterschiedliche Definitionsbereiche und Wertebereiche. Da wir diese für Kontexte aber stets explizit angeben, können wir Abbildungen mit ihren Zuordnungsvorschriften identifizieren. Damit ist $\bar{\varphi} = \varphi$ und wir können $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \varphi)$ schreiben. Insbesondere können wir ohne Bedenken die Kurzschreibweise $x'$ anstatt $\varphi(x)$ (und $y'$ statt $\varphi^d(y)$) verwenden, da die Ableitungen eines $x \in \bar{X}$ (und eines $y \in \bar{Y}$) in den beiden Kontexten $\mathbb{K}$ und $\overline{\mathbb{K}}$ identisch sind.

**2.5.2. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext.
Ein $\bar{x} \in X$ heißt *reduzierbar*, falls $\bar{x}$ $\vee$-irreduzibel ist, und falls es ein $x \in X$ gibt, mit $x \not\leq \bar{x}$ und $x' = \bar{x}'$.
Analog heißt ein $\vee$-irreduzibles $\bar{y} \in Y$ *reduzierbar*, falls für ein $y \in Y$ mit $y \not\leq \bar{y}$ gilt: $y' = \bar{y}'$.

**2.5.3. Hilfssatz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext. Dann gilt für jedes reduzierbare $\bar{x} \in X$ und für jedes reduzierbare $\bar{y} \in Y$:*

$$\mathbb{K} \cong (X \setminus \{\bar{x}\}, Y, \varphi)$$
$$\mathbb{K} \cong (X, Y \setminus \{\bar{y}\}, \varphi)$$

*Beweis:* $\bar{X} := X \setminus \{\bar{x}\}$ ist $\vee$-Unterhalbverband von $X$, denn wegen der $\vee$-Irreduzibilität von $\bar{x}$ gilt für alle Mengen $A \subseteq \bar{X}$: $\bigvee A \neq \bar{x}$, also: $\bigvee A \in \bar{X}$.
Weiter ist $\bar{x}'' \neq \bar{x}$: Nach der Definition von reduzierbar gibt es ein $\tilde{x} \in X$ mit $\tilde{x} \not\leq \bar{x}$ und $\tilde{x}' = \bar{x}'$. Mit der Formel für $\varphi^d$ aus 1.4.7 erhalten wir: $\bar{x}'' = \varphi^d(\varphi(\bar{x})) = \bigvee\{x \in X | \varphi(x) \geq \varphi(\bar{x})\} \geq \tilde{x} \vee \bar{x}$, denn es gilt $\varphi(\tilde{x}) \geq \varphi(\bar{x})$. Aber es ist auch $\tilde{x} \not\leq \bar{x}$, also folgt $\bar{x}'' \geq \tilde{x} \vee \bar{x} > \bar{x}$.
Daraus können wir $\varphi^d(Y) \subseteq \bar{X}$ folgern, denn $\bar{x}$ ist kein Begriffsumfang und damit auch nicht in $\varphi^d(Y)$ enthalten.
Mit 2.5.1 folgt die erste Behauptung.
Für die zweite Isomorphie zeigt man analog, daß $\bar{Y} := Y \setminus \{\bar{y}\}$ $\vee$-Unterhalbverband ist, und daß $\bar{y} \notin \varphi(X)$ gilt, d.h. $\varphi(X) \subseteq \bar{Y}$. □

Aufgrund obiger Aussage können wir nun reduzierte Kontexte wie folgt definieren:

**2.5.4. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext.

1. Ist $\bar{x} \in X$ reduzierbar, so heißt der Verbandskontext $(X \setminus \{\bar{x}\}, Y, \varphi)$ *elementare $X$-Reduzierung* von $\mathbb{K}$.
   Analog heißt der Verbandskontext $(X, Y \setminus \{\bar{y}\}, \varphi)$, mit reduzierbarem $\bar{y} \in Y$, *elementare $Y$-Reduzierung* von $\mathbb{K}$.
   Ist $\overline{\mathbb{K}}$ elementare $X$- oder $Y$-Reduzierung, so nennen wir $\overline{\mathbb{K}}$ auch allgemein *elementare Reduzierung.*
2. Ein Verbandskontext $\overline{\mathbb{K}}$ heißt *Reduzierung* von $\mathbb{K}$, falls es eine Folge von Verbandskontexten
   $$\mathbb{K} = \mathbb{K}_0, \mathbb{K}_1, \ldots, \mathbb{K}_{n-1}, \mathbb{K}_n = \overline{\mathbb{K}}$$
   gibt, sodaß für $i = 1, \ldots n$ jeweils $\mathbb{K}_i$ elementare Reduzierung von $\mathbb{K}_{i-1}$ ist.
3. Ist $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \varphi)$ Reduzierung von $\mathbb{K}$, und gibt es kein weiteres reduzierbares Element $\bar{x} \in \bar{X}$ oder $\bar{y} \in \bar{Y}$, so heißt $\overline{\mathbb{K}}$ *reduziert* oder *reduzierter Kontext zu* $\mathbb{K}$.

Jede Reduzierung von $\mathbb{K}$ ist isomorph zu $\mathbb{K}$. Den reduzierten Kontext zu endlichen Verbandskontexten können wir noch genauer angeben:

**2.5.5. Hilfssatz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ endlicher Verbandskontext. Der eindeutig bestimmte reduzierte Kontext zu $\mathbb{K}$ ist*

$$(\langle\varphi^d(Y)\rangle, \langle\varphi(X)\rangle, \varphi),$$

*wobei $\langle\varphi^d(Y)\rangle := \{\bigvee A | A \subseteq \varphi^d(Y)\}$ den kleinsten $\vee$-Unterverband von $X$ bezeichnet, der $\varphi^d(Y)$ beinhaltet. (Analog ist $\langle\varphi(X)\rangle := \{\bigvee A | A \subseteq \varphi(X)\}$ definiert.)*

*Beweis:* Sei $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \varphi)$ reduzierter Kontext zu $\mathbb{K}$.
1. Dann ist $\bar{X}$ $\vee$-Unterhalbverband von $X$, und es gilt: $\varphi^d(Y) \subseteq \bar{X}$. Also ist auch $\langle\varphi^d(Y)\rangle \subseteq \bar{X}$.
2. Sei $x \in \bar{X} \setminus \varphi^d(Y)$ beliebig. Dann ist $x'' \neq x$, und da die zweite Ableitung $\varphi^d\varphi$ extensiv ist, gilt insbesondere: $x'' \not\leq x$. Weiter ist $(x'')' = x'$, also ist $x$ genau dann reduzierbar, wenn es $\vee$-irreduzibel ist. Da es laut Vorraussetzung in $\bar{X}$ keine reduzierbaren Elemente gibt, kann also keines der $x \in \bar{X} \setminus \varphi^d(Y)$ $\vee$-irreduzibel sein, d.h. $I^\vee(\bar{X}) \subseteq \varphi^d(Y)$.
3. Wir haben vorausgesetzt, daß $X$, und damit auch $\bar{X}$, endlich ist. Also ist $I^\vee(\bar{X})$ $\vee$-dicht in $\bar{X}$. Das widerum heißt, daß sich jedes $x \in \bar{X}$ als Supremum von Elementen aus $I^\vee(\bar{X}) \subseteq \varphi^d(Y)$ darstellen läßt. Also ist $\langle\varphi^d(Y)\rangle = \bar{X}$.
Analog zeigt man $\bar{Y} = \langle\varphi(X)\rangle$. □

Zusammen mit dem Ergebnis des vorherigen Abschnitts können wir jetzt die isomorphen Verbandskontexte klassifizieren:

**2.5.6. Satz.** *Für $i = 1, 2$ seien $\mathbb{K}_i := (X_i, Y_i, \varphi_i)$ endliche Verbandskontexte. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *$\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ sind isomorph.*
2. *Der reduzierte Kontext zu $\mathbb{K}_1$ ist inzidenzisomorph zum reduzierten Kontext zu $\mathbb{K}_2$.*
3. *Es gibt Reduzierungen $\overline{\mathbb{K}}_1$ zu $\mathbb{K}_1$, und $\overline{\mathbb{K}}_2$ zu $\mathbb{K}_2$, sodaß $\overline{\mathbb{K}}_1$ inzidenzisomorph zu $\overline{\mathbb{K}}_2$ ist.*

*Beweis:*
„$1 \Rightarrow 2$“. Der reduzierte Kontext zu $\mathbb{K}_i$ ist nach 2.5.5 gleich $(\langle\varphi_i^d(Y)\rangle, \langle\varphi_i(X)\rangle, \varphi_i)$ (für $i = 1, 2$). Da $\mathbb{K}_1$ und $\mathbb{K}_2$ isomorph sind, gibt es einen Ordnungsisomorphismus zwischen $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$, und weil $\varphi_i^d(Y_i) \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}_i)$ ist ($i = 1, 2$), gibt es auch einen Ordnungsisomorphismus

$$\gamma_X : \varphi_1^d(Y_1) \to \varphi_2^d(Y_2).$$

Weiter ist $\varphi_i : \varphi_i^d(Y_i) \to \varphi_i(X_i)$ für $i = 1, 2$ jeweils Ordnungsantiisomorphismus, mit der Inversen $\varphi_i^d : \varphi_i(X_i) \to \varphi_i^d(Y_i)$. (Dies gilt nach 1.4.4.) Also ist auch

$$\gamma_Y := \varphi_2 \circ \gamma_X \circ \varphi_1^d : \varphi_1(X) \to \varphi_2(X)$$

ein Ordnungsisomorphismus. Betrachten wir nun folgende Inzidenzrelationen für die reduzierten Kontexte:

$$I_i := \mathrm{IR}_{\varphi_i^d(Y_i),\varphi_i(X_i)}(\varphi_i).$$

(trivialerweise ist $\varphi_i^d(Y_i)$ $\vee$-dicht in $\langle\varphi_i^d(Y_i)\rangle$ und genauso $\varphi_i(X_i)$ in $\langle\varphi_i(X_i)\rangle$.)
Dann ist $\gamma := (\gamma_X, \gamma_Y)$ ein Inzidenzisomorphismus: Sei dazu $x \in \varphi_1^d(Y_1)$ und $y \in \varphi_1(X_1)$. $(x, y)$ ist genau dann in $I_1$ enthalten, wenn $y \leq \varphi_1(x)$ ist. Da $\gamma_Y$ Ordnungsisomorphismus ist, ist dies äquivalent zu $\gamma_Y(y) \leq \gamma_Y(\varphi_1(x)) = \varphi_2(\gamma_X(x))$. Dies liegt nach Definition von $I_2$ genau dann vor, wenn $(\gamma_X(x), \gamma_Y(y)) \in I_2$ ist.
„$2 \Rightarrow 3$". Dies ist trivial.
„$3 \Rightarrow 1$". Inzidenzisomorphe Kontexte sind insbesondere isomorph, also gilt $\mathbb{K}_1 \cong \overline{\mathbb{K}}_1 \cong \overline{\mathbb{K}}_2 \cong \mathbb{K}_2$. □

In Anwendungen sind meist spezielle Verbandskontexte erwünscht – z.B. Fuzzy-Kontexte. Es macht daher nur selten Sinn, den eben definierten reduzierten Kontext wirklich zu berechnen. Bei Bedarf kann man entsprechende Definitionen formulieren, welche die besonderen Struktureigenschaften der gewünschten Klasse von Verbandskontexten erhalten. Umbreit definiert in [Um94] beispielsweise bereinigte, streng bereinigte und reduzierte Fuzzy-Kontexte.

Eine andere Strategie besteht darin, die bereits vorhandenen klassischen Algorithmen zur Analyse der Kontexte auf den zu $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ isomorphen klassischen Kontext $\mathbb{K}_* = (G, M, \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi))$, mit $\vee$-dichten $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$, anzuwenden. Damit diese Algorithmen effizient arbeiten können, sollte man dann bei Bedarf $\mathbb{K}_*$ zunächst klassisch bereinigen und reduzieren.

Zu diesem Zweck führen wir die Potenzmengenreduzierung ein:

**2.5.7. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext. Ein Potenzmengenkontext $\mathbb{K}_* = (\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(M), \mathrm{IR}_{\mathfrak{P}(G),\mathfrak{P}(M)}(\varphi))$ heißt *reduzierter Potenzmengenkontext zu* $\mathbb{K}$, falls $\mathbb{K}_*$ durch klassische Bereinigung und Reduzierung eines zu $\mathbb{K}$ inzidenzisomorphen Potenzmengenkontextes entstanden ist.

$\mathbb{K}_*$ ist dann inzidenzisomorph zum reduzierten Kontext $\overline{\mathbb{K}}$ zu $\mathbb{K}$.

**2.5.8. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein endlicher Verbandskontext. Dann gibt es (bis auf Umbenennung von Gegenständen und Merkmalen) genau einen reduzierten Potenzmengenkontext $\mathbb{K}_* = (G, M, I)$.*

*Beweis:* vgl. [GaWi96] Hilfssatz 12 auf Seite 27. □

## 2.6 Begriffsverbände

Die Menge der Begriffe eines Ordnungskontextes ist, wie wir bereits wissen, eine geordnete Menge. Diese können wir im endlichen Fall mit Hilfe eines Hasse-Diagramms darstellen.

Betrachten wir wieder einen Verbandskontext $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$, so bildet die Begriffsmenge ja einen Verband (siehe Satz 2.1.8). Weiterhin haben wir bereits des öfteren $\vee$-dichte Teilmengen $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ benötigt. Diese können wir auch für eine sparsamere Beschriftung des Hasse-Diagramms ausnutzen:

**2.6.1. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ Verbandskontext, und seien $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ $\vee$-dicht. Ein Begriff $(g'', g')$ mit $g \in G$ heißt *Gegenstandsbegriff* und ein Begriff $(m', m'')$, $m \in M$ *Merkmalsbegriff.*

**2.6.2. Hilfssatz.** *Sei $(X, Y, \varphi)$ endlicher Verbandskontext, $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ $\vee$-dichte Teilmengen, und sei $(x, y)$ ein Begriff. Dann gilt:*

$$x = \bigvee \{g'' | (g'', g') \textit{ ist Gegenstandsbegriff}, \ (g'', g') \le (x, y)\}$$
$$y = \bigvee \{m'' | (m', m'') \textit{ ist Merkmalsbegriff}, \ (m', m'') \ge (x, y)\}$$

*Damit kann man den Umfang von $(x, y)$ als Supremum der Umfänge aller kleineren Gegenstandsbegriffe darstellen, und den Inhalt von $(x, y)$ erhält man als Supremum der Inhalte aller größeren Merkmalsbegriffe.*

*Beweis:* Sei $(x, y)$ beliebiger Begriff. Dann ist $x = \bigvee\{g \in G | g \le x\}$. Ist $g \le x$, so ist auch $g'' \le x'' = x$. Also ist $x = \bigvee\{g'' | g \in G, g'' \le x\}$. Weiter ist für jedes $g \in G$ $(g'', g')$ ein Begriff, also insbesondere Gegenstandsbegriff, und nach Definition ist $(g'', g') \le (x, y) \Leftrightarrow g'' \le x$. Damit ist die erste Aussage gezeigt.
Die Gleichung für $y$ kann man ähnlich zeigen. □

Im Hasse-Diagramm des Begriffsverbandes ist es also nicht nötig, alle Begriffe zu beschriften. Es genügt, an die Gegenstandsbegriffe den Umfang zu schreiben, und an die Merkmalsbegriffe den Inhalt. Hierbei ist es üblich, den Umfang etwas unterhalb des Knotens, und den Inhalt etwas oberhalb davon zu schreiben. Den Umfang eines Begriffs im Diagramm erhält man dann, indem man das Supremum aller Umfänge bildet, die unterhalb des Begriffs stehen, d.h. die durch einen aufsteigenden Linienzug mit ihm verbunden sind. Analog erhält man den Inhalt, indem man das Supremum aller Inhalte bildet, die „oberhalb“ stehen.

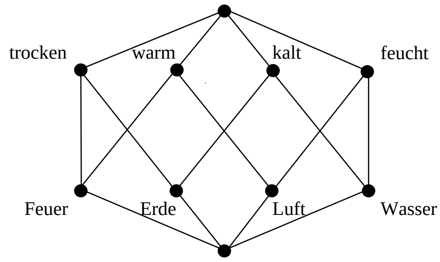



Abbildung 2.2: Begriffsverband des Kontextes „Vier Elemente“

**2.6.3. Beispiel.** Folgender klassischer Kontext gibt Aristoteles' Vorstellung von den vier (irdischen) Elementen wieder (entnommen aus [KeLe97]):

| | warm | kalt | trocken | feucht |
|---|---|---|---|---|
| Feuer | × | | × | |
| Erde | | × | × | |
| Luft | × | | | × |
| Wasser | | × | | × |

In das Hasse-Diagramm des zugehörigen Begriffsverbandes (Abb. 2.2) tragen wir die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(M)$ ein. Dies sind die einelementigen Teilmengen, also die Gegenstände und die Merkmale. Aus dem Diagramm kann man dann z.B. die Merkmale des Gegenstandes Luft ablesen – alle Merkmale, die über dem Begriff mit der Beschriftung Luft liegen: warm und feucht. Die Merkmale, die Feuer und Luft gemeinsam haben, liegen oberhalb beider Gegenstände: Feuer und Luft sind beide warm.

Bevor man den Begriffsverband eines (klassischen) Kontextes berechnet, bereinigt und reduziert man diesen zunächst, damit der Algorithmus zur Berechnung des Begriffsverbandes effizient arbeiten kann (siehe [GaWi96], [Boe97]). Hierbei sollte man sich allerdings Informationen merken, sodaß man auch den gestrichenen Elementen Begriffe zuordnen kann.

**Algorithmus zur Berechnung des Begriffsverbandes.**
Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ endlicher Verbandskontext mit $\vee$-dichten Teilmengen $G \subseteq X$ und $M \subseteq Y$. Bezeichne mit $\mathbb{K}_* = (G, M, \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi))$ den isomorphen klassischen Kontext. Bereinige und reduziere diesen Kontext. Für den resultierenden reduzierten Potenzmengenkontext $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{G}, \bar{M}, \bar{I})$ von $\mathbb{K}$ gilt: $\bar{G} \subseteq G \subseteq X$, $\bar{M} \subseteq M \subseteq Y$ und $\bar{I} = \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi) \cap \bar{G} \times \bar{M}$. Merke dabei für jedes $g \in G \setminus \bar{G}$ in einer Tabelle eine Menge $\nu_G(g) \subseteq \bar{G}$, für welche gilt: $\nu_G(g)' = g' \cap \bar{M}$. In

[GaWi96] ist ein Algorithmus angegeben, der diese Information speichert. Analog speichert man für alle $m \in M \setminus \bar{M}$ die zugehörigen Mengen $\nu_M(m)$. Für den verbliebenen reduzierten klassischen Kontext $\overline{\mathbb{K}}$ kann man nun den Begriffsverband berechnen und wie üblich beschriften. Die $g \in G \setminus \bar{G}$, schreibt man nun an den Begriff, welcher oberhalb aller $\bar{g} \in \nu_G(g)$ steht (das Supremum der entsprechenden Gegenstandsbegriffe). Die gestrichenen $m \in M$ kann man dual an das Infimum der Begriffe zu $\bar{m} \in \nu_M(m)$ nachtragen. Als Ergebnis hat man den Begriffsverband von $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ – beschriftet durch die $g \in G$ und die $m \in M$.

**2.6.4. Beispiel.** Betrachten wir wieder unser Standardbeispiel 2.2.13 (auf Seite 29), den Fuzzy-Kontext $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R}) = (\mathfrak{P}_L(G), \mathfrak{P}_L(M), \varphi)$. In Beispiel 2.3.7 (siehe Seite 35) haben wir den dazu inzidenzisomorphen klassischen Kontext $\mathbb{K}_* = (\tilde{G}, \tilde{M}, \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi))$ angegeben (siehe auch Beispiel 2.4.10 auf Seite 41). Dieser Kontext ist bereits bereinigt. Beim Reduzieren fallen vier Gegenstände weg: $\frac{1}{2}$Mo, Mo, $\frac{1}{2}$Fr und $\frac{1}{2}$Sa. Mengen mit respektive gleichen Ableitungen sind:

$$\nu_{\tilde{G}}(\tfrac{1}{2}\mathrm{Mo}) = \emptyset \qquad \nu_{\tilde{G}}(\tfrac{1}{2}\mathrm{Fr}) = \{\tfrac{1}{2}\mathrm{Do}, \tfrac{1}{2}\mathrm{So}\}$$
$$\nu_{\tilde{G}}(\mathrm{Mo}) = \{\tfrac{1}{2}\mathrm{Di}, \tfrac{1}{2}\mathrm{So}\} \qquad \nu_{\tilde{G}}(\tfrac{1}{2}\mathrm{Sa}) = \{\tfrac{1}{2}\mathrm{Mi}, \tfrac{1}{2}\mathrm{So}\}$$

Zum reduzierten Kontext kann man nun mit entsprechender Software den Begriffsverband zeichnen lassen. (In [Vo96] wird eine Bibliothek mit Algorithmen zur Begriffsanalyse vorgestellt. Hiermit lassen sich u.a. recht gut gesetzte Hasse-Diagramme zu Begriffsverbänden erzeugen.) Die reduziblen Gegenstände schreiben wir im Begriffsverband jeweils an das Supremum der entsprechenden Gegenstandsbegriffe ($\frac{1}{2}$Mo an das kleinste Element, Mo an das Supremum der Begriffe zu $\frac{1}{2}$Di und $\frac{1}{2}$So, u.s.w.). Der resultierende Begriffsverband ist in Abb. 2.3 zu sehen.

## 2.7 Teilkontexte

Wir haben bereits isomorphe Verbandskontexte betrachtet, also Verbandskontexte, deren Begriffsverbände zueinander isomorph sind. Wir haben dabei in Satz 2.5.1 gesehen, das ein Kontext $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \varphi)$ zu $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ isomorph ist, falls $\bar{X} \subseteq X$ und $\bar{Y} \subseteq Y$ $\vee$-Unterhalbverbände sind, und zusätzlich $\varphi^d(Y) \subseteq \bar{X}$ und $\varphi(X) \subseteq \bar{Y}$ gilt. Erfüllt ein Kontext $\overline{\mathbb{K}}$ diese Zusatzbedingung nicht, so sind die Kontexte zwar nicht mehr isomorph, aber es gibt immer noch eine enge Beziehung zwischen den Begriffsverbänden:

**2.7.1. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext. Ein weiterer Kontext $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\varphi})$ heißt *Teilkontext* von $\mathbb{K}$, falls $\bar{X} \subseteq X$ und $\bar{Y} \subseteq Y$ $\vee$-Unterhalbverbände sind, und falls weiter für alle $x \in \bar{X}$ gilt:

$$\bar{\varphi}(x) = \bigvee\{y \in \bar{Y} | y \leq \varphi(x)\}.$$

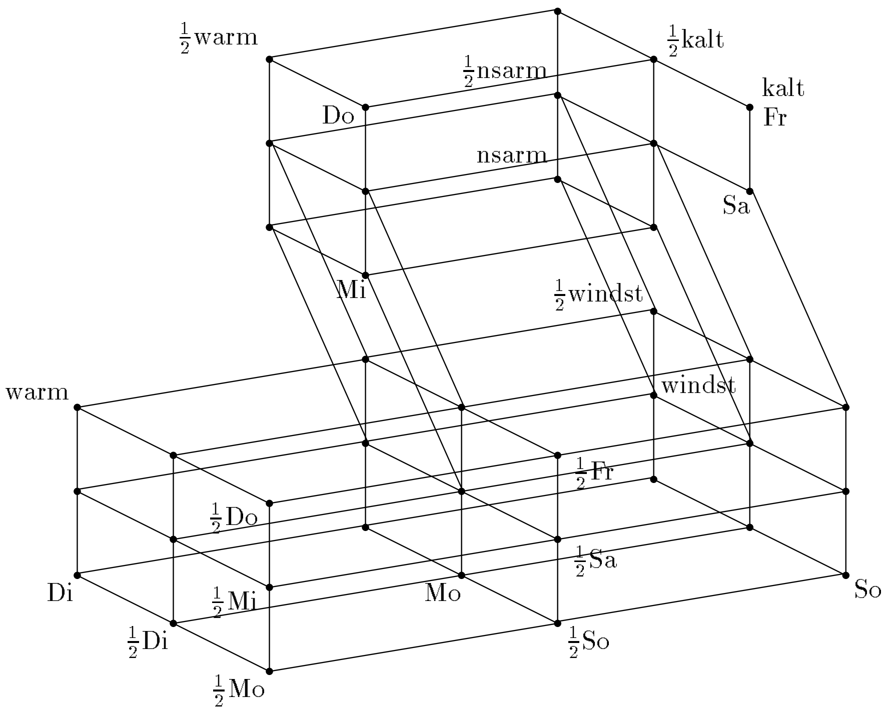



Abbildung 2.3: Der Begriffsverband zum $L$-Fuzzy-Kontext aus Bsp. 2.2.13

**2.7.2. Hilfssatz.** *Ist* $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ *Verbandskontext, so ist für alle* $\vee$*-Unterhalbverbände* $\bar{X} \subseteq X$ *und* $\bar{Y} \subseteq Y$ *der Teilkontext* $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\varphi})$*, mit* $\bar{\varphi}$ *wie oben, wohldefiniert, d.h.* $\bar{\varphi}$ *ist Galoisabbildung.*

*Beweis:* Setze für $x \in \bar{X}$: $\bar{\varphi}(x) := \bigvee\{y \in \bar{Y} | y \leq \varphi(x)\}$ und weiter für $y \in \bar{Y}$: $\psi(y) := \bigvee\{x \in \bar{X} | x \leq \varphi^d(y)\}$. Dann ist zunächst $\bar{\varphi}(x) \in \bar{Y}$ und $\psi(y) \in \bar{X}$, da sowohl $\bar{Y}$ als auch $\bar{X}$ $\vee$-Unterhalbverbände von $Y$ bzw. von $X$ sind. Weiter gilt für $x \in \bar{X}$ und $y \in \bar{Y}$:

$$\begin{aligned} x \leq \psi(y) &\Leftrightarrow x \leq \bigvee\{x \in \bar{X} | x \leq \varphi^d(y)\} \\ &\Leftrightarrow x \leq \varphi^d(y) \\ &\Leftrightarrow y \leq \varphi(x) \\ &\Leftrightarrow y \leq \bigvee\{y \in \bar{Y} | y \leq \varphi(x)\} \\ &\Leftrightarrow y \leq \bar{\varphi}(x), \end{aligned}$$

also ist nach 1.4.2 $(\bar{\varphi}, \psi)$ eine Galoisverbindung. □

**2.7.3. Beispiel.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R})$ ein $L$-Fuzzy-Kontext, und sei $H \subseteq G$, sowie $N \subseteq M$. Dann ist $\mathfrak{P}_L(H)$ $\vee$-Unterhalbverband von $\mathfrak{P}_L(G)$, und $\mathfrak{P}_L(N)$ $\vee$-Unterhalbverband von $\mathfrak{P}_L(M)$.
Wir betrachten jetzt den $L$-Fuzzy-Kontext $\overline{\mathbb{K}} = (H, N, \overline{\mathcal{R}})$, wobei

$$\overline{\mathcal{R}} := \mathcal{R} \cap (H \times N)$$

(Wir verwenden hierbei implizit für $Y \subseteq X$ die natürliche Einbettung

$$\iota : \mathfrak{P}_L(Y) \to \mathfrak{P}_L(X), \mathcal{A} \mapsto \iota(\mathcal{A}) : x \mapsto \begin{cases} \mathcal{A}(x) & \text{falls } x \in Y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der $L$-Fuzzy-Teilmengen von $Y$ in die Menge der $L$-Fuzzy-Teilmengen von $X$, sowie die natürliche Projektion

$$\pi : \mathfrak{P}_L(X) \to \mathfrak{P}_L(Y) : \mathcal{A} \mapsto \pi(\mathcal{A}) : y \mapsto \mathcal{A}(y)$$

von $\mathfrak{P}_L(X)$ nach $\mathfrak{P}_L(Y)$.)
Bezeichnen wir mit $\varphi : \mathfrak{P}_L(G) \to \mathfrak{P}_L(M)$ die Galoisabbildung zu $\mathbb{K}$, sowie mit $\bar{\varphi} : \mathfrak{P}_L(H) \to \mathfrak{P}_L(N)$ die Galoisabbildung zu $\overline{\mathbb{K}}$, so gilt für $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(H)$ und $m \in N$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\mathcal{A})(m) &= \bigwedge_{g \in H} \mathcal{A}(g) \to \overline{\mathcal{R}}(g, m) \\ &= \bigwedge_{g \in H} \mathcal{A}(g) \to \mathcal{R}(g, m) \\ &= \varphi(\mathcal{A})(m), \end{aligned}$$

denn es ist $\mathcal{A}(g) = 0$ und damit $\mathcal{A}(g) \to \mathcal{R}(g, m) = 1$ für $g \in G \setminus H$. Damit ist

$$\bar{\varphi}(\mathcal{A}) = \bigvee \{\mathcal{B} \in \mathfrak{P}_L(N) | \mathcal{B} \subseteq \varphi(\mathcal{A})\},$$

also ist $\overline{\mathbb{K}} = (H, N, \overline{\mathcal{R}})$ ein Teilkontext von $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R})$.

**2.7.4. Bemerkung.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ Verbandskontext und $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\varphi})$ Teilkontext von $\mathbb{K}$. Dann gilt für jedes $x \in \bar{X}$ und $y \in \bar{Y}$:

1. $\bar{\varphi}(x) \leq \varphi(x)$
2. $\bar{\varphi}^d(y) \leq \varphi^d(y)$
3. Ist $\varphi^d(Y) \subseteq \bar{X}$, so gilt weiter $\bar{\varphi}^d(y) = \varphi^d(y)$.
4. Ist $\varphi(X) \subseteq \bar{Y}$, so gilt weiter $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$.

Teilkontexte sind natürlich im allgemeinen nicht mehr isomorph zu $\mathbb{K}$. Wir können aber immer noch interessante Aussagen über den Begriffsverband eines Teilkontextes machen:

**2.7.5. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein Verbandskontext, und $\overline{\mathbb{K}} = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{\varphi})$ ein Teilkontext von $\mathbb{K}$.*

*1. Ist $\varphi^d(Y) \subseteq \bar{X}$, so ist die Abbildung*

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{K}}) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}), (x, y) \mapsto (x, \varphi(x))$$

*eine $\wedge$-erhaltende Ordnungseinbettung.*

*2. Ist $\varphi(X) \subseteq \bar{Y}$, so ist die Abbildung*

$$\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{K}}) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}), (x,y) \mapsto (\varphi^d(y), y)$$

*eine $\vee$-erhaltende Ordnungseinbettung.*

*3. Die Abbildungen*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{K}}) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}), (x,y) \mapsto (\varphi^d(\varphi(x)), \varphi(x)) \text{ und} \\
&\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{K}}) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}), (x,y) \mapsto (\varphi^d(y), \varphi(\varphi^d(y)))
\end{aligned}$$

*sind Ordnungseinbettungen der Begriffsverbände.*

*Beweis:*
1. Jeder Begriffsumfang $x \in \bar{\varphi}^d(\bar{Y})$ von $\overline{\mathbb{K}}$ ist auch Begriffsumfang in $\mathbb{K}$. Denn aus

$$x = \bar{\varphi}^d(\bar{\varphi}(x)) = \varphi^d(\bar{\varphi}(x)) \geq \varphi^d(\varphi(x)) \geq x$$

folgt $x = \varphi^d(\varphi(x))$. Also ist die oben angegebene Abbildung wohldefiniert. Nach Definition der Ordnung in Begriffsverbänden ist sie sogar $\wedge$-erhaltende Ordnungseinbettung.
2. Dies kann man analog beweisen.
3. Betrachte zunächst $\mathbb{K}_1 := (X, \bar{Y}, \varphi_1)$ als Teilkontext von $\mathbb{K}$, und anschließend $\overline{\mathbb{K}}$ als Teilkontext von $\mathbb{K}_1$, so erhalten wir mit (1) und (2) die erste Abbildung. Für die zweite Abbildung gehen wir umgekehrt vor, d.h. wir betrachten zunächst den Teilkontext $\mathbb{K}_2 := (\bar{X}, Y, \varphi_2)$ von $\mathbb{K}$, und anschließend den Teilkontext $\overline{\mathbb{K}}$ von $\mathbb{K}_2$.

$\square$

# Kapitel 3

# Mehrwertige Kontexte

Wir haben im vorherigen Kapitel allgemeine Ergebnisse für Ordnungskontexte und insbesondere für Verbandskontexte zusammengetragen. Nun wollen wir eine spezielle Klasse von Verbandskontexten, die *mehrwertigen Kontexte*, neu einführen.

Mehrwertige Kontexte wurden zwar auch schon bisher in der formalen Begriffsanalyse behandelt. Aber zur Analyse betrachtete man immer gewisse einwertige Kontexte, die durch sogenannte Skalierung aus dem ersten entstanden sind. Unsere Neuerungen werden diese Skalierungen nicht vollkommen ersetzen, sie bilden lediglich eine schöne Ergänzung der Theorie. Wir werden nämlich sehen, daß die Skalierungen Teilkontexte des mehrwertigen Kontextes erzeugen.

## 3.1 Klassische Definition

In Anwendungen der formalen Begriffsanalyse gibt es häufig nicht nur Merkmale, die ein Gegenstand haben oder nicht haben kann. Merkmale wie „Farbe“, „Gewicht“ oder „Geschlecht“ haben Ausprägungen oder Werte. Hierfür hat man den *mehrwertigen Kontext* eingeführt, welcher auch solche Merkmale verarbeiten kann:

**3.1.1. Definition.** Ein *mehrwertiger Kontext* $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ besteht aus einer Menge $G$ von Gegenständen, einer Menge $M$ von (mehrwertigen) Merkmalen, einer Menge $W$ von Merkmalsausprägungen oder Werten und einer dreistelligen Relation $I \subseteq G \times M \times W$, mit

$$(g, m, w), (g, m, v) \in I \Rightarrow w = v.$$

Jedes Merkmal $m$ kann als Funktion von einer Teilmenge von $G$ nach $W$ aufgefaßt werden. Wir schreiben deshalb für $(g, m, w) \in I$ auch $m(g) = w$ und sprechen:

„Das Merkmal $m$ hat bei Gegenstand $g$ den Wert $w$.[1] Den *Definitionsbereich* von $m$ bezeichnen wir mit $\mathrm{dom}(m)$ und das *Bild* mit $m(G)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(m) &:= \{g \in G \mid \exists w \in W : (g, m, w) \in I\} \\ m(G) &:= \{w \in W \mid \exists g \in \mathrm{dom}(m) : (g, m, w) \in I\} \end{aligned}$$

Ein Merkmal $m$ heißt *vollständig*, falls $\mathrm{dom}(m) = G$ ist. Der Kontext heißt vollständig, falls alle Merkmale vollständig sind.

**3.1.2. Beispiel.** Ich bringe hier ein Beispiel eines mehrwertigen Kontextes aus der Algebra: Man betrachte die Merkmale <u>i</u>rrational, <u>a</u>lgebraisch und <u>t</u>ranszendent einer reellen Zahl. Hierbei seien irrational und transzendent jeweils einwertige Merkmale, d.h. ein $\times$ in der Tabelle bedeutet, daß eine Zahl die entsprechende Eigenschaft hat. Das Merkmal algebraisch sei aber mehrwertig: Ein $n \in \mathbb{N}$ bedeutet, daß diese Zahl algebraisch vom Grad $n$ sei. Das heißt, es ist Nullstelle eines normierten Polynoms über $\mathbb{Q}$. Falls die Zahl nicht algebraisch ist, so steht kein Eintrag bei diesem Merkmal.

| | i | a | t |
|---|---|---|---|
| $2$ | | 1 | |
| $\sqrt{2}$ | $\times$ | 2 | |
| $\sqrt[3]{2}$ | $\times$ | 3 | |
| $\pi$ | $\times$ | | $\times$ |

## 3.2 Ansatz für vollständige mehrwertige Kontexte

Wir möchten nun Begriffe in mehrwertigen Kontexten einführen. Um die Definitionen übersichtlich zu lassen, beschränken wir uns zunächst auf vollständige Kontexte. Wir können aus jedem Kontext einen vollständigen Kontext konstruieren, indem wir einen zusätzlichen Nullwert $\delta$ einführen: Ist $g \notin \mathrm{dom}(m)$, so setzen wir $m(g) := \delta$.

Um Begriffe zu definieren, welche analoge Eigenschaften wie diejenigen im einfachen klassischen Kontext haben, benötigen wir eine Galoisabbildung zwischen zwei vollständigen Verbänden. Es gibt sicherlich mehrere Möglichkeiten, geeignete vollständige Verbände und eine Galoisverbindung dazwischen anzugeben, und damit einen Begriffsverband über einen mehrwertigen Kontext zu definieren. Die

[1] In Literatur über Datenbanken betrachtet man häufig $g$ als Funktion über $M$, und schreibt entsprechend $g(m) = w$. Wir halten uns aber an die in der Begriffsanalyse übliche Schreibweise.

folgende ist von der Art inspiriert, mit welcher man im Alltag Gegenstände beschreibt: Man gibt die möglichen Werte an, die eine Gegenstandsmenge in einem Merkmal annehmen kann.

Will man z.B. in einer Gruppe von Menschen die Teenager beschreiben, so könnte man etwa angeben, ihr Alter liege zwischen 15 und 20 Jahren. Da das Geschlecht dabei keine Rolle spielt, könnte man erwähnen, daß das Geschlecht sowohl männlich als auch weiblich sein kann.

Wir beschreiben also Gegenstände, indem wir jedem Merkmal eine Teilmenge der Wertemenge zuordnen:

**3.2.1. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein vollständiger mehrwertiger Kontext. Eine *Beschreibung* in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $B\colon M \to \mathfrak{P}(W)$ von der Merkmalsmenge $M$ in die Potenzmenge von $W$.

Eine Beschreibung ist genauer, d.h. sie trifft auf weniger Gegenstände zu, wenn man die Anzahl der Werte beschränkt, die ein Gegenstand in einem Merkmal annehmen kann. Wir haben also eine Ordnung auf der Menge der Beschreibungen:

**3.2.2. Hilfssatz.** *Die Menge $\mathfrak{P}(W)^M$ der Beschreibungen in $\mathbb{K}$ mit der Teilordnung*

$$B_1 \leq B_2 :\Leftrightarrow B_1(m) \supseteq B_2(m), \forall m \in M$$

*bildet einen vollständigen Verband.*

*Beweis:* Es ist die Vollständigkeit des Verbandes zu zeigen: Sei $T$ eine beliebige Indexmenge und zu $t \in T$ sei $B_t$ eine Beschreibung in $\mathbb{K}$. Das Infimum und das Supremum der $B_t$, $t \in T$ sind dann:

$$\bigwedge_{t\in T} B_t\colon m \mapsto \bigcup_{t\in T} B_t(m) \quad \text{und} \quad \bigvee_{t\in T} B_t\colon m \mapsto \bigcap_{t\in T} B_t(m) \qquad \square$$

Im klassischen einwertigen Kontext ist die Ableitung einer Menge von Gegenständen $A$ definiert als die größte Merkmalsmenge, die mit allen Gegenständen $g \in A$ inzidiert ($A' = \bigcup\{m \in M | gIm, \forall g \in A\}$). Analog nehmen wir jetzt im mehrwertigen Fall die genaueste Beschreibung, die auf alle $g \in A$ „zutrifft", d.h. daß für alle $g \in A$ gilt: $m(g) \in A'(m), \forall m \in M$.

**3.2.3. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ vollständiger mehrwertiger Kontext. Wir definieren die Abbildungen $\varphi : \mathfrak{P}(G) \to \mathfrak{P}(W)^M$ und $\psi : \mathfrak{P}(W)^M \to \mathfrak{P}(G)$, indem wir für eine Gegenstandsmenge $A \subseteq G$ und eine Beschreibung $B \in \mathfrak{P}(W)^M$ setzen:

$$\varphi(A) := M \to \mathfrak{P}(W), m \mapsto m(A)$$
$$\psi(B) := \{g \in G | m(g) \in B(m), \forall m \in M\}$$

Da wir $\varphi$ und $\psi$ als die Ableitungen in unserem Verbandskontext verwenden wollen, schreiben wir kurz $A'$ für $\varphi(A)$ und $B'$ für $\psi(B)$. Dazu müssen wir allerdings noch zeigen, daß diese Abbildungen tatsächlich eine Galoisverbindung bilden:

**3.2.4. Hilfssatz.** *Die beiden Abbildungen $\varphi$ und $\psi$ bilden eine Galoisverbindung zwischen $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(W)^M$.*

*Beweis:* Wir zeigen dies mit Hilfe des Kriteriums 1.4.2: $A \subseteq B' \Leftrightarrow A' \geq B$.
„$\Rightarrow$“. Sei $A \subseteq B' \;\Rightarrow A'(m) = m(A) \subseteq m(B') \subseteq B(m), \forall m \in M \Rightarrow A' \geq B$
„$\Leftarrow$“. Sei $A' \geq B \;\Rightarrow m(A) = A'(m) \subseteq B(m), \forall m \in M \Rightarrow A \subseteq B'$ □

**3.2.5. Folgerung.** Im vollständigen mehrwertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ seien $A, A_1, A_2 \subseteq G$ Gegenstandsmengen und $B, B_1, B_2 \colon M \to \mathfrak{P}(W)$ Beschreibungen. Weiterhin sei $I$ beliebige Indexmenge, und für alle $i \in I$ sei $A_i \subseteq G$ Gegenstandsmenge und $B_i \colon M \to \mathfrak{P}(W)$ Beschreibung. Dann gilt:

1. $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2' \leq A_1'$
2. $A \subseteq A''$
3. $A' = A'''$
4. $(\bigcup A_i)' = \bigwedge A_i'$
5. $A \subseteq B' \Leftrightarrow B \leq A'$

1'. $B_1 \leq B_2 \Rightarrow B_2' \subseteq B_1'$
2'. $B \leq B''$
3'. $B' = B'''$
4'. $(\bigvee B_i)' = \bigcap B_i'$

*Beweis:* Diese Aussagen folgen aus der Definition der Galoisverbindung, sowie den Sätzen 1.4.4, 1.4.7 und 1.4.2. □

Als Ergebnis unserer Überlegungen können wir den mehrwertigen Kontext als Verbandskontext auffassen:

**3.2.6. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein vollständiger mehrwertiger Kontext. Wir identifizieren dann $\mathbb{K}$ mit dem Verbandskontext*

$$\mathbb{K} = (\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(W)^M, \varphi),$$

*wobei $\varphi$ wie in 3.2.3 definiert ist, und erhalten dadurch Ableitungen und Begriffe in $\mathbb{K}$. Die Menge aller Begriffe $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ ist ein vollständiger Verband.*

Aus Kapitel 2 wissen wir, daß es für jeden Verbandskontext einen inzidenzisomorphen einwertigen Kontext gibt: Mit $\vee$-dichten Teilmengen $\tilde{G} \subseteq \mathfrak{P}(G)$ und $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}(W)^M$ ist $\mathbb{K}$ isomorph zu

$$\widetilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi)).$$

Die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}(G)$ – die einelementigen Teilmengen $\{g\}$ mit $g \in G$ – sind $\vee$-dicht in $\mathfrak{P}(G)$:

$$\tilde{G} := I^{\vee}(\mathfrak{P}(G)) \cong G$$

Um die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}(W)^M$ zu beschreiben, betrachten wir folgende Definition:

**3.2.7. Definition.** Für $m \in M$ und $w \in W$ ist die Beschreibung $m \neq w$ definiert durch:

$$(m \neq w)(n) := \begin{cases} W \setminus \{w\} & \text{falls } n = m \\ W & \text{sonst} \end{cases}$$

**3.2.8. Hilfssatz.** *Die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}(W)^M$ sind durch die Beschreibungen $m \neq w$ gegeben:*

$$I^{\vee}(\mathfrak{P}(W)^M) = \{m \neq w | m \in M, w \in W\}.$$

*Diese Menge ist $\vee$-dicht in $\mathfrak{P}(W)^M$.*

*Beweis:* Das kleinste Element des Verbandes $\mathfrak{P}(W)^M$ ist

$$0_{\mathfrak{P}(W)^M} \colon M \to \mathfrak{P}(W), m \mapsto W.$$

1. $I^{\vee}(\mathfrak{P}(W)^M) = \{m \neq w | m \in M, w \in W\}$:
„$\subseteq$". Wir geben für jede Beschreibung $B \neq 0_{\mathfrak{P}(W)^M}$, die nicht von der Form $m \neq w$ ist, zwei kleinere Beschreibungen an, deren Supremum gleich $B$ ist:
Da $B \neq 0_{\mathfrak{P}(W)^M}$ ist, gibt es ein $m_1 \in M$ mit $B(m_1) \subsetneq W$. Es existiert also ein $w_1 \in W$ mit $w_1 \notin B(m_1)$. Da $B \neq (m_1 \neq w_1)$ ist, gibt es ein weiteres Paar $m_2 \in M$, $w_2 \in W$ mit $w_2 \notin B(m_2)$. Folgende Beschreibungen sind also echt kleiner als $B$:

$$B_1 \colon m \mapsto \begin{cases} B(m_1) \dot{\cup} \{w_1\} & \text{falls } m = m_1 \\ B(m) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$B_2 \colon m \mapsto \begin{cases} B(m_2) \dot{\cup} \{w_2\} & \text{falls } m = m_2 \\ B(m) & \text{sonst} \end{cases}$$

Betrachten wir nun $B_1 \vee B_2 \colon m \mapsto B_1(m) \cap B_2(m)$:
Falls $m_1 \neq m_2$ ist, so gilt für $i = 1, 2$: $B_1(m_i) \cap B_2(m_i) = B(m_i)$. Ist andernfalls $m_1 = m_2$, so muß $w_1 \neq w_2$ sein, und es gilt ebenso $B_1(m_1) \cap B_2(m_1) = B(m_1)$. Die Gleichheit gilt erst recht für die restlichen $m \in M$, d.h. $B_1(m) \cap B_2(m) = B(m)$ für alle $m \in M$. Also ist $B = B_1 \vee B_2$ und damit ist $B$ nicht $\vee$-irreduzibel. Die $0_{\mathfrak{P}(W)^M}$ ist auch nicht $\vee$-irreduzibel, da nach Definition $0_{\mathfrak{P}(W)^M} = \bigvee \emptyset$ gilt.
„$\supseteq$". Wir betrachten alle Beschreibungen $B$, die echt kleiner als $m \neq w$ sind:
Ist $B < (m \neq w)$, so gilt für jedes $n \in M$: $B(n) \supseteq (m \neq w)(n)$. Da die Beschreibungen nicht gleich sind, gibt es weiter ein $n_0 \in M$ mit $B(n_0) \supsetneq (m \neq w)(n_0)$. Der Wert $(m \neq w)(n_0)$ kann aber nur für das Merkmal $n_0 = m$ erweitert werden, da für $n \neq m$ bereits $(m \neq w)(n) = W = 1_{\mathfrak{P}(W)}$ gilt. Weiter ist $(m \neq w)(m) = W \setminus \{w\}$, also gibt es in $\mathfrak{P}(W)$ nur ein Element, das echt größer als

$(m \neq w)(m)$ ist, nämlich die $1_{\mathfrak{P}(W)} = W$. Die einzige Beschreibung in $\mathfrak{P}(W)^M$, welche echt kleiner als $m \neq w$ ist, ist also die $0_{\mathfrak{P}(W)^M}$.
Damit gilt: $\bigvee\{B \in \mathfrak{P}(W)^M | B < (m \neq w)\} = 0_{\mathfrak{P}(W)^M}$, also ist $m \neq w$ $\vee$-irreduzibel.
2. Wir haben noch die $\vee$-Dichtheit von $I^\vee(\mathfrak{P}(W)^M)$ zu zeigen:
Diese folgt aus der Definition der $m \neq w$: Jedes $B \in \mathfrak{P}(W)^M$ kann man darstellen als

$$B = \bigvee\{m \neq w | m \in M, w \notin B(m)\}.$$ □

Wir verwenden also folgende $\vee$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{P}(W)^M$:

$$\tilde{M} := \{m \neq w | m \in M, w \in W\}.$$

Wir kennen nun $\vee$-dichte Teilmengen $G \subseteq \mathfrak{P}(G)$ und $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}(W)^M$. Um den inzidenzisomorphen klassischen Kontext zu $\mathbb{K} = (\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(W)^M, \varphi)$ angeben zu können, müssen wir noch die Inzidenzrelation $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{G,\tilde{M}}(\varphi)$ analysieren.

Ein Paar $(g, m \neq w)$ ist nach Definition genau dann in der Inzidenzrelation $\tilde{I}$ enthalten, wenn $(m \neq w) \leq \varphi(g)$ ist, also $(m \neq w)(n) \supseteq n(g)$ für alle $n \in M$ gilt. Dies ist nur für $n = m$ eine echte Einschränkung, also kann man $\tilde{I}$ wie folgt beschreiben:

$$(g, m \neq w) \in \tilde{I} \Leftrightarrow m(g) \in W \setminus \{w\} \Leftrightarrow m(g) \neq w.$$

Damit haben wir den inzidenzisomorphen einwertigen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ beschrieben:

**3.2.9. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ vollständiger mehrwertiger Kontext. Dann ist der Begriffsverband von $\mathbb{K}$ isomorph zum Begriffsverband des klassischen Kontextes $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$, wobei*

$$\tilde{M} := \{m \neq w | m \in M, w \in W\}$$

*und*

$$(g, m \neq w) \in \tilde{I} :\Leftrightarrow m(g) \neq w.$$

**3.2.10. Beispiel.** Betrachten wir den Kontext aus Beispiel 3.1.2 (siehe Seite 52). Diesen können wir künstlich vollständig machen und erhalten so den vollständigen Kontext

$$\mathbb{K}_v = (G_v, M_v, W_v, I_v)$$

mit gleicher Gegenstandsmenge $G_v = G$ und Merkmalsmenge $M_v = M$, der Wertemenge $W_v = W \dot{\cup} \{\delta\} = \mathbb{N} \cup \{\times, \delta\}$ und der Inzidenzrelation $I_v$:

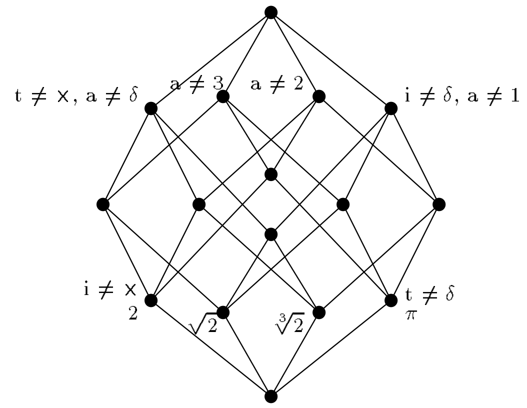



Abbildung 3.1: Der Begriffsverband des vollständigen Kontextes $\mathbb{K}_v$.

| | i | a | t |
|---|---|---|---|
| $2$ | $\delta$ | $1$ | $\delta$ |
| $\sqrt{2}$ | $\times$ | $2$ | $\delta$ |
| $\sqrt[3]{2}$ | $\times$ | $3$ | $\delta$ |
| $\pi$ | $\times$ | $\delta$ | $\times$ |

Der einwertige Kontext $\widetilde{\mathbb{K}}_v$ hat unendlich viele Merkmale, da $W_v$ unendlich ist. Die Merkmale $m \neq w$, die für alle Gegenstände gelten, können wir aber weglassen, da sie bei einer Reduzierung des Kontextes sowieso gestrichen würden. $m \neq w$ gilt für alle Gegenstände, falls kein Gegenstand $g \in G$ beim Merkmal $m$ den Wert $w$ hat. Der Kontext $\widetilde{\mathbb{K}}_v$ – und damit auch $\mathbb{K}_v$ – ist also zu folgendem Kontext isomorph:

| | $i \neq \delta$ | $i \neq \times$ | $a \neq \delta$ | $a \neq 1$ | $a \neq 2$ | $a \neq 3$ | $t \neq \delta$ | $t \neq \times$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | | $\times$ | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | | $\times$ |
| $\sqrt{2}$ | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | | $\times$ | | $\times$ |
| $\sqrt[3]{2}$ | $\times$ | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | | | $\times$ |
| $\pi$ | $\times$ | | | $\times$ | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |

Der zugehörige Begriffsverband ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

## 3.3 Mehrwertige Kontexte als Verbandskontext

Nachdem wir nun für vollständige mehrwertige Kontexte den Begriffsverband sinnvoll eingeführt haben, überlegen wir uns jetzt, wie man diese Definition auf nicht vollständige Kontexte erweitern kann. Dabei verstehen wir unter „nicht vollständig“, daß der Kontext *leere Zellen* haben kann, d.h. Paare $(g, m)$ mit: $(g, m, w) \notin I, \forall w \in W$.

Unsere Definition sollte verträglich mit dem einwertigen Kontext sein. Das heißt, falls man einen einwertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ als mehrwertigen Kontext mit einer einelementigen Wertemenge $W = \{\times\}$ auffaßt, so sollte der Begriffsverband isomorph zum klassischen einwertigen Begriffsverband sein.

Im einwertigen Kontext entscheidet nur das Auftreten von Merkmalen über die Zugehörigkeit von Gegenständen zu Begriffen, nicht das Fehlen von Merkmalen. Wird letzteres benötigt, so führt man ein zusätzliches *dichotomes* Merkmal $\neg m$ ein, das genau dann auf einen Gegenstand $g$ zutrifft, wenn $g$ nicht mit $m$ inzidiert. Der *dichotome Kontext* ist entsprechend der Kontext, der neben den Merkmalen $m \in M$ zusätzlich alle dichotomen Merkmale $\neg m$ enthält.

Der naheliegende Lösungsversuch, einen mehrwertigen Kontext zunächst künstlich vollständig zu machen, und dann den Ansatz des vorherigen Kapitels anzuwenden, ergibt also nicht das gewünschte Verhalten: Der Begriffsverband eines einwertigen Kontextes – aufgefaßt als mehrwertiger Kontext – wäre dann isomorph zum Begriffsverband des dichotomen Kontextes, welcher i.a. wesentlich mehr Begriffe enthält als der einwertige Begriffsverband.

Wir müssen also das Verhalten der leeren Zellen getrennt betrachten: Falls eine Menge $A$ von Gegenständen einen Gegenstand $g$ enthält, der bei Merkmal $m$ keinen Eintrag hat (d.h. $(g, m)$ ist leere Zelle), so sollte der zugehörige Begriff bei Merkmal $m$ keinerlei Einschränkungen haben. Letzteres bedeutet, die Ableitung von $A$ sollte bei Merkmal $m$ alle möglichen Einträge zulassen, insbesondere auch keinen Eintrag.

Zur Erläuterung ein Beispiel: Unter allen Fortbewegungsmitteln ist die Leistung des Motors ein interessantes Unterscheidungsmerkmal: Hierin unterscheidet sich Beispielsweise ein Mofa vom Motorrad. Aber für ein Fahrrad hat dieses Merkmal keinen Sinn, da es gar keinen Motor hat. Man kann also den Begriff aller motorisierten Fahrzeuge bestimmen, indem man alle Fahrzeuge betrachtet, für die eine Leistung des Motors angegeben ist. Andererseits gehören zu dem Begriff aller Zweiräder sowohl Fahrzeuge mit, als auch ohne Motor. Will man also die Menge aller Zweiräder beschreiben, so muß man für das Merkmal Leistung nicht nur alle Werte $w \in W$ zulassen, sondern auch „keinen Eintrag“.

Um diesen Sachverhalt mathematisch zu fassen, fügen wir zur Potenzmenge der Wertemenge $W$ ein künstliches größtes Element $\delta$ hinzu. Dadurch können wir die Beschreibungen, die wir in Abschnitt 3.2 für vollständige mehrwertige Kontexte eingeführt haben, verallgemeinern: Es ist dann für eine Beschreibung $B$ ein Unterschied, ob $B(m) = W$ ist, oder ob $B$ bei Merkmal $m$ keinerlei Einschränkungen aufweist. Anschließend leiten wir daraus analog zum vorherigen Abschnitt einen Verbandskontext her, welchen wir mit dem mehrwertigen Kontext identifizieren.

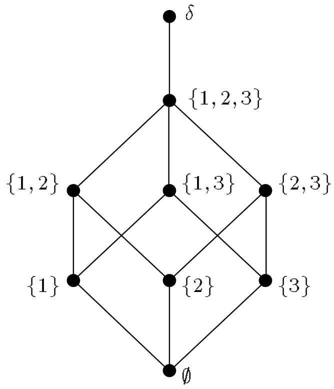



Abbildung 3.2: Der vollständige Verband $\dot{\mathfrak{P}}(A)$ mit $A = \{1, 2, 3\}$.

Das Hinzufügen eines künstlichen größten Elementes zu einem vollständigen Verband nennen wir *Punktieren* des Verbandes. Wir werden es im folgenden häufiger benötigen:

**3.3.1. Definition.** Sei $V$ ein vollständiger Verband. Dann entsteht der *punktierte Verband* zu $V$, $\dot{V} := V\dot{\cup}\{\delta\}$, indem man zu $V$ ein neues maximales Element $\delta$ hinzufügt, mit $x < \delta$ für alle $x \in V$.

Der punktierte Verband $\dot{V}$ zu einem vollständigen Verband $V$ ist wieder vollständig. Für $A \subseteq V$ setzen wir dann $\dot{A} := A\dot{\cup}\{\delta\}$. Ist $A$ $\wedge$-Unterhalbverband von $V$, so ist auch $\dot{A}$ $\wedge$-Unterhalbverband von $\dot{V}$.

**3.3.2. Beispiel.** Abbildung 3.2 zeigt für $A := \{1, 2, 3\}$ den Verband $\dot{\mathfrak{P}}(A)$.

Mit diesem Hilfsmittel können wir Beschreibungen sinnvoll auf allgemeine (d.h. nicht vollständige) mehrwertige Kontexte erweitern:

**3.3.3. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein mehrwertiger Kontext. Eine *Beschreibung* in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $B \colon M \to \dot{\mathfrak{P}}(W)$.

Wir definieren wie im vollständigen Fall eine Teilordnung auf der Menge der Beschreibungen:

**3.3.4. Hilfssatz.** *Die Menge $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$ der Beschreibungen in $\mathbb{K}$ mit der Teilordnung*

$$B_1 \leq B_2 :\Leftrightarrow B_1(m) \supseteq B_2(m), \forall m \in M$$

*bildet einen vollständigen Verband.*

*Beweis:* Analog zu 3.2.2. $\square$

Wie auch schon in Abschnitt 3.2, haben wir wieder zwei vollständige Verbände $X = \mathfrak{P}(G)$ und $Y = \dot{\mathfrak{P}}(W)^M$ gegeben und benötigen noch eine Galoisverbindung zwischen diesen. Hierzu ersetzen wir in Definition 3.2.3 die Abbildung $m\colon \mathfrak{P}(\mathrm{dom}(m)) \to \mathfrak{P}(W), m \mapsto m(A)$ durch die erweiterte Abbildung

$$\dot{m}\colon \mathfrak{P}(G) \to \dot{\mathfrak{P}}(W), \dot{m}(A) := \begin{cases} m(A) & \text{falls } A \subseteq \mathrm{dom}(m) \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$$

und können somit $\varphi$ und $\psi$ verallgemeinern:

**3.3.5. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein mehrwertiger Kontext. Für eine Gegenstandsmenge $A \subseteq G$ und eine Beschreibung $B : M \to \dot{\mathfrak{P}}(W)$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(A) &:= M \to \dot{\mathfrak{P}}(W), m \mapsto \dot{m}(A) \\ \dot{\psi}(B) &:= \{g \in G | \dot{m}(g) \subseteq B(m), \forall m \in M\} \end{aligned}$$

Wir schreiben für $\dot{\varphi}(A)$ wieder kurz $A'$ und für $\dot{\psi}(B)$ kurz $B'$. Durch diese Definition der Ableitungen erhalten wir das gewünschte Verhalten für leere Zellen: Falls eine Menge $A$ von Gegenständen einen Gegenstand $g$ enthält, welcher bei Merkmal $m \in M$ keinen Eintrag hat, so gilt für die Ableitung $A'$: $A'(m) = \delta \supsetneq W$.

Man kann analog zum vollständigen Fall beweisen, daß diese Abbildungen eine Galoisverbindung ergeben. Damit definiert $\mathbb{K} = (\mathfrak{P}(G), \dot{\mathfrak{P}}(W)^M, \dot{\varphi})$ wirklich einen Verbandskontext.

**3.3.6. Hilfssatz.** *Die beiden Ableitungen $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ bilden eine Galoisverbindung zwischen $\mathfrak{P}(G)$ und $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$.*

*Beweis:* Analog zu 3.2.4. □

Halten wir das Ergebnis unserer bisherigen Überlegungen wieder in einem Satz fest:

**3.3.7. Satz.** *Wir identifizieren den mehrwertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ mit dem Verbandskontext*

$$\mathbb{K} = (\mathfrak{P}(G), \dot{\mathfrak{P}}(W)^M, \dot{\varphi}),$$

*wobei $\dot{\varphi}$ wie in 3.3.5 definiert ist. Die Menge aller Begriffe $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ ist ein vollständiger Verband.*

Auch hier sind wir wieder an einem inzidenzisomorphen einwertigen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ interessiert. Wir betrachten also die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$ und überprüfen, ob sie $\vee$-dicht sind. Um $I^\vee(\dot{\mathfrak{P}}(W)^M)$ zu umschreiben, definieren wir ähnlich wie oben einige besondere Beschreibungen:

**3.3.8. Definition.** Für $m \in M$ sind die Beschreibungen $m \neq \delta$ wie folgt definiert:

$$(m \neq \delta)(n) := \begin{cases} W & \text{falls } n = m \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls keine Verwechslungen auftreten können, schreiben wir für $m \neq \delta$ oft auch kurz $m$. Weiterhin definieren wir die Beschreibungen $m \neq w$ mit $m \in M$, $w \in W$:

$$(m \neq w)(n) := \begin{cases} W \setminus \{w\} & \text{falls } n = m \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$$

**3.3.9. Hilfssatz.** *Die Menge aller $\vee$-irreduziblen Beschreibungen ist gleich:*

$$I^{\vee}(\dot{\mathfrak{P}}(W)^M) = \{m \neq \delta | m \in M\} \cup \{m \neq w | m \in M, w \in W\}.$$

*Diese Menge ist $\vee$-dicht in $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$.*

*Beweis:* Daß alle Beschreibungen $B$, welche nicht von der Form $m \neq w$ oder $m \neq \delta$ sind, $\vee$-reduzibel sind, zeigt man analog wie im vollständigen Fall (3.2.8). Echt kleiner als eine Beschreibung $m \neq \delta$ ist nur die $0_{\dot{\mathfrak{P}}(W)^M} : M \to \dot{\mathfrak{P}}(W), m \mapsto \delta$. Und kleiner als $m \neq w$ sind lediglich die Beschreibungen $m \neq \delta$ und $0_{\dot{\mathfrak{P}}(W)^M}$. In beiden Fällen ist die Beschreibung $\vee$-irreduzibel, da sie ungleich dem Supremum aller echt kleineren Beschreibungen ist.
Die $\vee$-Dichtheit ist ebenfalls einleuchtend. □

Wir erhalten also durch folgende Definition eine $\vee$-dichte Teilmenge von $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$:

$$\tilde{M} := \{m \neq \delta | m \in M\} \cup \{m \neq w | m \in M, w \in W\}.$$

**3.3.10. Beispiel.** Zur Veranschaulichung der Verbandstruktur ist in Abb. 3.3 der vollständige Verband $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$ für eine zweielementige Merkmalsmenge $M$ und eine zweielementige Wertemenge $W$ zu sehen. Die $\vee$-irreduziblen Elemente sind durch große Knoten hervorgehoben. Hier wird insbesondere deutlich, daß $(m \neq \delta) \leq (m \neq w)$ ist für $m \in M$ und $w \in W$. Also ist der Verband der Beschreibungen nicht *atomistisch*. (In einem atomistischen Verband $V$ sind alle $\vee$-irreduziblen Elemente obere Nachbarn der $0_V$.) Es zahlt sich also aus, daß wir Verbandskontexte allgemein für vollständige Verbände behandelt haben. Viele Beweise wären nämlich wesentlich einfacher, wenn man sich auf atomistische Verbände beschränkte, aber man könnte diese Ergebnisse dann nicht für mehrwertige Kontexte verwenden.
Weiterhin sind die Beschreibungen, welche mindestens ein $m \in M$ auf $\emptyset \in \dot{\mathfrak{P}}(W)$ abbilden, durch weiße Knoten gekennzeichnet. Zu diesen Beschreibungen kann es keine Gegenstände im Kontext geben, da für keinen Gegenstand $m(g) \subseteq \emptyset$ gilt.

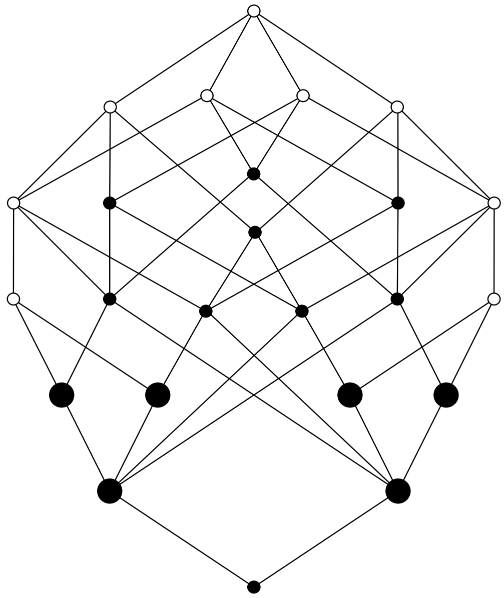


Abbildung 3.3: Verbandstruktur von $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$ für eine jeweils zweielementige Merkmalsmenge $M$ und Wertemenge $W$.

Betrachten wir nun die Inzidenzrelation $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{G,\tilde{M}}(\dot{\varphi})$:

$$\begin{aligned}(g, m \neq \delta) \in \tilde{I} &\Leftrightarrow (m \neq \delta) \leq \dot{\varphi}(g) \\ &\Leftrightarrow \dot{\varphi}(g)(m) \subseteq W \\ &\Leftrightarrow g \in \mathrm{dom}(m) \\ (g, m \neq w) \in \tilde{I} &\Leftrightarrow (m \neq w) \leq \dot{\varphi}(g) \\ &\Leftrightarrow \dot{\varphi}(g)(m) \subseteq W \setminus \{w\} \\ &\Leftrightarrow g \in \mathrm{dom}(m) \text{ und } m(g) \neq w\end{aligned}$$

Als Ergebnis können wir den inzidenzisomorphen einwertigen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}}$ angeben:

**3.3.11. Satz.** *Der mehrwertige Kontext* $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ *ist isomorph zum einwertigen Kontext* $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$, *wobei*

$$\tilde{M} := \{m \neq \delta | m \in M\} \cup \{m \neq w | m \in M, w \in W\}$$

*und*

$$\begin{aligned}(g, m \neq \delta) \in \tilde{I} &:\Leftrightarrow g \in \mathrm{dom}(m) \\ (g, m \neq w) \in \tilde{I} &:\Leftrightarrow g \in \mathrm{dom}(m) \textit{ und } m(g) \neq w\end{aligned}$$

Wie wir zu Beginn des Abschnitts bereits gefordert haben (siehe Seite 58), sollte es möglich sein, unsere Definitionen als Verallgemeinerungen des einwertigen Kontextes zu verstehen. Ein einwertiger Kontext $\mathbb{K}_e = (G, M, I_e)$ kann auf natürliche Weise als mehrwertiger Kontext $\mathbb{K}_m = (G, M, W, I_m)$ aufgefaßt werden, indem man $W := \{\times\}$ setzt und $(g, m, \times) \in I_m :\Leftrightarrow (g, m) \in I_e$.

**3.3.12. Satz.** *Jeder einwertige Kontext* $\mathbb{K}_e = (G, M, I_e)$ *ist isomorph zum entsprechenden mehrwertigen Kontext* $\mathbb{K}_m = (G, M, W, I_m)$.

*Beweis:* Wir betrachten den zu $\mathbb{K}_m$ inzidenzisomorphen einwertigen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}}_m = (G, \tilde{M}, \tilde{I}_m)$: $\tilde{M}$ enthält für jedes $m \in M$ die Elemente $m \neq \delta$ und $m \neq \times$. Es ist $(g, m \neq \times) \in \tilde{I}_m \Leftrightarrow g \in \mathrm{dom}(m)$ und $m(g) \neq \times$. Da aber $W = \{\times\}$ ist, ist dies unmöglich, also ist $(g, m \neq \times) \notin \tilde{I}_m$ für alle $g \in G$ und alle $m \in M$. Durch Streichen der Merkmale $m \neq \times$ ändert sich also der Begriffsverband nicht. Setzen wir also $\bar{M} := \{m \neq \delta | m \in M\} \subseteq \tilde{M}_m$, und $\bar{I} := \tilde{I}_m \cap (G \times \bar{M})$, so ist:

$$\mathfrak{B}(\mathbb{K}_m) \cong \mathfrak{B}(\widetilde{\mathbb{K}}_m) \cong \mathfrak{B}(G, \bar{M}, \bar{I}).$$

Weiter ist $(g, m \neq \delta) \in \bar{I} \Leftrightarrow g \in \mathrm{dom}(m) \Leftrightarrow (g, m) \in I_e$, d.h. $I_e \cong \bar{I}$. Mit $M \cong \bar{M}$ erhalten wir also

$$\mathfrak{B}(\mathbb{K}_e) \cong \mathfrak{B}(G, \bar{M}, \bar{I}) \cong \mathfrak{B}(\mathbb{K}_m).$$ □

**3.3.13. Beispiel.** Betrachten wir noch einmal unser Beispiel 3.1.2 (auf Seite 52): Wir brauchen jetzt nicht mehr die Vollständigkeit des Kontextes zu erzwingen und können gleich den zu $\mathbb{K}$ isomorphen einwertigen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ berechnen. Die Inzidenzrelation $\tilde{I}$ sieht dabei wie folgt aus:

| | $i$ | $i \neq \times$ | $a$ | $a \neq 1$ | $a \neq 2$ | $a \neq 3$ | $t$ | $t \neq \times$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | | | × | | × | × | | |
| $\sqrt{2}$ | × | | × | × | | × | | |
| $\sqrt[3]{2}$ | × | | × | × | × | | | |
| $\pi$ | × | | | | | | × | |

Es fällt auf, daß die Spalten $i \neq \times$ und $t \neq \times$ leer sind. Dies beruht auf der Tatsache, daß für diese Merkmale im mehrwertigen Kontext nur ein Wert vorkommt, es sind also einwertige Merkmale. Bei einem einwertigen Merkmal genügt es, das Merkmal $m = (m \neq \delta)$ zu berücksichtigen, welches isomorph zum ursprünglichen Merkmal $m$ ist. Wir können den Kontext also vereinfachen zu:

| | $i$ | $a$ | $a \neq 1$ | $a \neq 2$ | $a \neq 3$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | | × | | × | × | |
| $\sqrt{2}$ | × | × | × | | × | |
| $\sqrt[3]{2}$ | × | × | × | × | | |
| $\pi$ | × | | | | | × |

Der Begriffsverband für diesen Kontext ist in Abbildung 3.4 zu sehen.

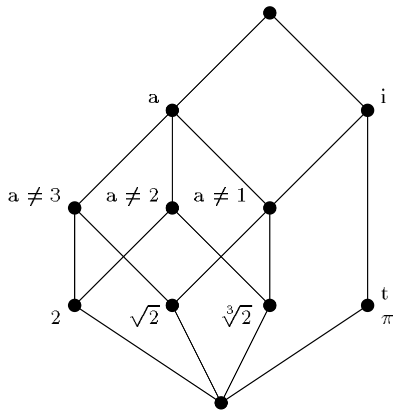



Abbildung 3.4: Der Begriffsverband des Kontextes für reellen Zahlen

## 3.4 Begriffliche Datenbanken

Werfen wir einen kurzen Blick auf eine Anwendung dieser Theorie: die *Begriffliche Datenbank*. Dabei wird eine Datenbank als mehrwertiger Kontext aufgefaßt, in dessen Begriffsverband der Anwender navigieren kann, um eine Auswahl an Gegenständen mit gewissen Egenschaften zu treffen. Durch eine geeignete Darstellung des Begriffsverbandes erhält man so ein intuitives Werkzeug, das den Umgang mit großen Datenbanken erleichtern kann. Eine solche Begriffliche Datenbank ist beispielsweise in dem Computerprogramm TOSCANA ([Tos]) implementiert, allerdings verwendet TOSCANA natürlich nicht den hier neu eingeführten mehrwertigen Begriffsverband, sondern arbeitet mittels Skalierungen (siehe weiter unten).

Eine Implementierung des mehrwertigen Begriffsverbandes wie wir ihn hier eingeführt haben, erfordert noch die Lösung einiger Probleme:

In großen Datenbanken mit unterschiedlichen Merkmalstypen ist es günstiger, anstatt eines globalen Wertebereichs $W$ für den ganzen Kontext, für jedes Merkmal $m \in M$ eine separate Wertemenge $W_m$ zu betrachten. Beschreibungen ordnen dann jedem Merkmal $m \in M$ jeweils eine Teilmenge von Werten aus $W_m$ zu. Eine solche Sichtweise verkompliziert aber die Theorie, da wir dann die Beschreibungen nicht mehr einfach als Abbildungen definieren können (sondern z.B. als Folge $(B_m)_{m \in M}$ mit $B_m \subseteq W_m$). Da separate Wertemengen keine wichtigen Änderungen der Ergebnisse bringen – es werden dabei nur einige für den Begriffsverband nicht entscheidende Beschreibungen von vornherein weggelassen – benutzen wir hier für die Theorie weiterhin einen globalem Wertebereich, und behalten im Hinterkopf, daß man dies auf dem Computer anders implementieren würde.

Weiterhin enthält der Begriffsverband in ernsthaften Anwendungen meist so viele Begriffe, daß man das Hasse-Diagramm nicht mehr übersichtlich darstellen kann. Hier helfen gestufte Liniendiagramme weiter:

Den Begriffsverband eines einwertigen Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, I)$ kann man darstellen, indem man für zwei Teilmengen $M_1, M_2 \subseteq M$ mit $M = M_1 \cup M_2$ die Hasse-Diagramme der Begriffsverbände von $\mathbb{K}_1 := (G, M_1, I \cap G \times M_1)$ und $\mathbb{K}_2 := (G, M_2, I \cap G \times M_2)$ verschachtelt. Das heißt man stellt den Verband $V := (\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1) \times \mathfrak{B}(\mathbb{K}_2), \leq)$ mit

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) :\Leftrightarrow x_1 \leq y_1 \,\text{und}\, x_2 \leq y_2$$

dar, indem man anstelle von jedem Knoten des Hasse-Diagramms zu $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$ ein Rechteck zeichnet, und darin eine Kopie des Diagramms zu $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$ darstellt. Es gibt nun eine $\vee$-erhaltende Ordnungseinbettung von $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ nach $V$:

$$(A, B) \mapsto (((B \cap M_1)', B \cap M_1), ((B \cap M_2)', B \cap M_2)).$$

Man kann also die Begriffe von $\mathbb{K}$ in der Zeichnung hervorheben. Für eine genauere Beschreibung gestufter Liniendiagramme, und auch für einen Beweis, daß man $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ immer auf diese Weise darstellen kann, schlage man in [GaWi96], Seite 75ff nach.

Dieses Verfahren kann man (mit $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$) auch mehrfach anwenden und erhält dadurch mehrfach gestufte Liniendiagramme. In einem Computerprogramm kann man diese Diagramme auch interaktiv in mehreren Ebenen darstellen: Man zeichnet das übliche Hasse-Diagramm von $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_1)$, und der Benutzer kann per Mausklick auf einen Knoten eine Ebene tiefer zum entsprechenden Hasse-Diagramm von $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_2)$ vordringen. Durch einen weiterer Mausklick auf einen Knoten erscheint das zugehörige Diagramm von $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_3)$, u.s.w. Mit diesem Verfahren kann man beliebig komplizierte Verbände auf eine leicht verständliche Weise übersichtlich darstellen, wie die recht komfortable Implementierung in dem Programm TOSCANA zeigt.

**3.4.1. Beispiel.** Betrachte den klassischen einwertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ mit $G = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{A, B, C, D\}$ und der Inzidenzrelation

| $I$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | $\times$ | $\times$ | |
| 2 | $\times$ | | $\times$ | $\times$ |
| 3 | | $\times$ | | $\times$ |
| 4 | $\times$ | $\times$ | $\times$ | |

Der Begriffsverband dieses Kontextes ist in Abb. 3.5(1) als Hasse-Diagramm dargestellt. Man kann aber auch ein gestuftes Liniendiagramm erzeugen, indem man $M_1 := \{A, B\}$ und $M_2 := \{C, D\}$ setzt, und die Begriffsverbände von $\mathbb{K}_1 := (G, M_1, I \cap G \times M_1)$ (siehe Abb. 3.5(2)) und $\mathbb{K}_2 := (G, M_2, I \cap G \times M_2)$ (Abb. 3.5(3)) verschachtelt. Das resultierende gestufte Liniendiagramm ist in Abb. 3.5(4) zu sehen.

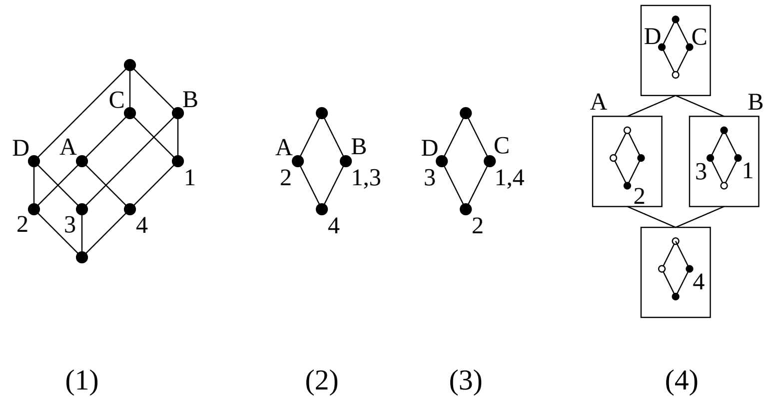



Abbildung 3.5: Darstellung eines Begriffsverbandes als gestuftes Liniendiagramm

Dieses Verfahren läßt sich auch auf mehrwertige Kontexte anwenden: Man partitioniert die Merkmalsmenge: $M = M_1 \cup \ldots \cup M_n$ und bildet ein mehrfach gestuftes Liniendiagramm der mehrwertigen Kontexte $\mathbb{K}_i := (G, M_i, W, I \cap G \times M_i \times W)$. Dies ist möglich, da die mehrwertigen Begriffsverbände isomorph zu Begriffsverbänden klassischer einwertiger Kontexte sind: Wir wissen, daß $\mathfrak{B}(\mathbb{K}) \cong \mathfrak{B}(\tilde{\mathbb{K}})$ ($\tilde{\mathbb{K}}$ wie in 3.3.11) und $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_i) \cong \mathfrak{B}(\tilde{\mathbb{K}}_i)$ ist. Wegen $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \cup \ldots \cup \tilde{M}_n$ und $\tilde{I}_i = \tilde{I} \cap G \times \tilde{M}_i$ kann man also $\mathfrak{B}(\tilde{\mathbb{K}})$ als gestuftes Liniendiagramm der $\mathfrak{B}(\tilde{\mathbb{K}}_i)$ darstellen, also auch $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ durch die $\mathfrak{B}(\mathbb{K}_i)$.

## 3.5 Skalierung

Der mehrwertige Begriffsverband enthält viele Begriffe, die für die Anwendung uninteressant sind. Beispielsweise ist wohl kaum ein Begriff erwünscht, der alle Fahrzeuge beschreibt, deren Motor eine Leistung von 40 kW oder 50 kW hat, nicht aber diejenigen mit einer Leistung von 45 kW. Betrachten wir geeignete Teilkontexte (vgl. Abschnitt 2.7), indem wir $\vee$-Unterhalbverbände des Verbandes aller Beschreibungen verwenden, so können wir uns auf die interessanten Begriffe beschränken. Dabei wird im wesentlichen das gemacht, was in der formalen Begriffsanalyse bereits unter dem Namen *Skalierung* bzw. *schlichte Skalierung* bekannt ist. Deshalb bezeichnen wir die Einschränkung der Beschreibungen $\mathfrak{P}(W)^M$ auf einen $\vee$-Unterhalbverband als die *Skalierung* eines mehrwertigen Kontextes:

**3.5.1. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I) = (\mathfrak{P}(G), \dot{\mathfrak{P}}(W)^M, \dot{\varphi})$ ein mehrwertiger Kontext, und sei $Y$ $\vee$-Unterhalbverband von $\mathfrak{P}(W)^M$. Dann heißt der Teilkontext $\mathbb{K}_Y := (\mathfrak{P}(G), Y, \varphi_Y)$ *skalierter Kontext* oder *Skalierung* zu $\mathbb{K}$, wobei $\varphi_Y$ wie in 2.7.1 definiert ist:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(A) &:= \bigvee \{B \in Y \mid B \leq \dot{\varphi}(A)\} \\ &= \bigvee \{B \in Y \mid \dot{m}(A) \subseteq B(m), \forall m \in M\}. \end{aligned}$$

Wir nennen $\mathbb{K}_Y$ *schlicht skaliert*, falls die Bedingungen, die an die Beschreibungen $B \in Y$ bei einem Merkmal $m \in M$ gestellt werden, unabhängig von den Werten der Beschreibungen in den anderen Merkmalen ist. Das heißt, falls es für jedes $m \in M$ einen $\wedge$-Unterhalbverband $Y_m$ von $\mathfrak{P}(W)$ gibt, sodaß

$$Y = \{B \in \mathfrak{P}(W)^M | B(m) \in \dot{Y}_m, \forall m \in M\}.$$

Etwas genauer formuliert, heißt $\mathbb{K}$ schlicht skaliert in den Merkmalen $m_i \in M$, $i \in I$, falls für alle $n \in M$ mit $n \neq m_i$ $(i \in I)$ zusätzlich gilt: $Y_n = \mathfrak{P}(W)$, d.h., falls die Beschreibungen nur in den Merkmalen $m_i$, $i \in I$, eingeschränkt sind.

Im Fall der schlichten Skalierung kann die Definition von $\varphi_Y$ auch wie folgt formuliert werden. Für $A \subseteq G$ ist $\varphi_Y(A)$ eine Abbildung von $M$ nach $\dot{\mathfrak{P}}(W)$, es gilt also für jedes $m \in M$:

$$\varphi_Y(A)(m) = \bigwedge\{B_m \in \dot{Y}_m | \dot{m}(A) \subseteq B_m\}$$

Aus Abschnitt 2.7 erhalten wir:

**3.5.2. Bemerkung.** Sei $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}(G), Y, \varphi_Y)$ eine Skalierung zum mehrwertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, I) = (\mathfrak{P}(G), \dot{\mathfrak{P}}(W)^M, \dot{\varphi})$. Dann gilt:

1. Die Ableitung einer Beschreibung $B \in Y$ ist in den beiden Kontexten $\mathbb{K}_Y$ und $\mathbb{K}$ gleich:
$$\varphi_Y^d(B) = \dot{\varphi}^d(B).$$
2. Für jede Gegenstandsmenge $A \subseteq \mathfrak{P}(G)$ und jede Beschreibung $B \in Y$ gilt:
$$B \leq \varphi_Y(A) \Leftrightarrow B \leq \dot{\varphi}(A)$$

*Beweis:*
1. Siehe 2.7.4(3).
2. Aus (1) folgt mit 1.4.2: $B \leq \varphi_Y(A) \Leftrightarrow A \subseteq \varphi_Y^d(B) = \dot{\varphi}^d(B) \Leftrightarrow B \leq \dot{\varphi}(A)$. □

**3.5.3. Satz.** *Sei* $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}(G), Y, \varphi_Y)$ *eine Skalierung zum mehrwertigen Kontext* $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$. *Dann ist die Abbildung*

$$\mathfrak{B}(\mathbb{K}_Y) \to \mathfrak{B}(\mathbb{K}), (A, B) \mapsto (A, \dot{\varphi}(A))$$

*eine* $\wedge$*-erhaltende Ordnungseinbettung.*

*Beweis:* Siehe 2.7.5(1). □

Ist man lediglich an einem klassischen Kontext interessiert, der inzidenzisomorph zu einer Skalierung von $\mathbb{K} = (G, M, W, I) = (\mathfrak{P}(G), \dot{\mathfrak{P}}(W)^M, \dot{\varphi})$ ist (dies wird wohl meistens der Fall sein), so braucht man den $\vee$-Unterhalbverband $Y$ von

$\mathfrak{P}_L(W)^M$ gar nicht anzugeben (und braucht entsprechend auch nicht nachzuweisen, daß dies wirklich $\vee$-Unterhalbverband ist). Man wählt einfach die Beschreibungen aus, die einen interessieren: $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}(W)^M$. Bezeichnen wir den davon erzeugten $\vee$-Unterhalbverband mit $Y := \{\bigvee A | A \subseteq \tilde{M}\}$, und die zugehörige Skalierung von $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K}_Y = (G, Y, \varphi_Y)$, so ist der klassische Kontext $\widetilde{\mathbb{K}}_{\tilde{M}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ mit $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{G,\tilde{M}}(\varphi_Y)$ inzidenzisomorph zu $\mathbb{K}_Y$. Die Inzidenzrelation $\tilde{I}$ erhält man dann durch 3.5.2(2):

$$\begin{aligned}(g, B) \in \tilde{I} &\Leftrightarrow B \leq \varphi_Y(g)\\ &\Leftrightarrow B \leq \dot{\varphi}(g)\end{aligned}$$

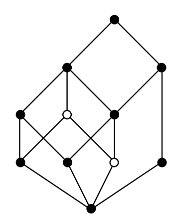
**3.5.4. Beispiel.** Betrachte den Kontext der reellen Zahlen (Beispiel 3.1.2 auf Seite 52 und Beispiel 3.3.13 auf Seite 63): An dem Begriff mit der Beschreibung $a \neq 2$, also dem Begriff, der alle Zahlen enthält, die algebraisch vom Grad 1 oder von einem größeren Grad als 2 sind, sind wir nicht unbedingt interessiert. Uns interessiert vielmehr, welche Zahlen algebraisch vom Grad $\leq 1$, $\leq 2$, usw. sind. Also betrachten wir für $i \in \mathbb{N}$ folgende Beschreibungen:

$$(\mathrm{a} \leq i) : M \to \mathfrak{P}(W), m \mapsto \begin{cases} \{1, \ldots, i\} & \text{falls } m = \mathrm{a} \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$$

(Da in unserem Kontext keine Zahlen vorkommen, die algebraisch von einem Grad $\geq 4$ sind, genügt es, die Beschreibungen $\mathrm{a} \leq 1$, $\mathrm{a} \leq 2$ und $\mathrm{a} \leq 3$ zu betrachten.)
Weiterhin interessiert uns natürlich, ob eine Zahl irrational oder transzendent ist, also betrachten wir auch die bereits bekannten Beschreibungen $\mathrm{i} \neq \delta$ und $\mathrm{t} \neq \delta$ (für die wir kurz i bzw. t schreiben).
Wir erhalten damit den klassischen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ mit der Merkmalsmenge $\tilde{M} = \{\mathrm{i}, \mathrm{a} \leq 1, \mathrm{a} \leq 2, \mathrm{a} \leq 3, \mathrm{t}\}$ und der Inzidenzmatrix $\tilde{I}$:

| | i | a ≤ 1 | a ≤ 2 | a ≤ 3 | t |
|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | | × | × | × | |
| $\sqrt{2}$ | × | | × | × | |
| $\sqrt[3]{2}$ | × | | | × | |
| $\pi$ | × | | | | × |

Der zugehörige Begriffsverband (siehe Abbildung 3.6) enthält weniger Begriffe als $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ und ist dadurch übersichtlicher.
Nach 3.5.3 läßt sich der Begriffsverband der Skalierung in $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ (vgl. Abb. 3.4) einbetten. Dies ist rechts angedeutet: Die ausgefüllten Knoten stellen die Begriffe des skalierten Kontextes dar. Wie man in der Skizze leicht erkennen kann, ist diese Einbettung sogar $\wedge$-erhaltend, denn das Infimum zweier ausgefüllter Knoten ist wieder ausgefüllt.



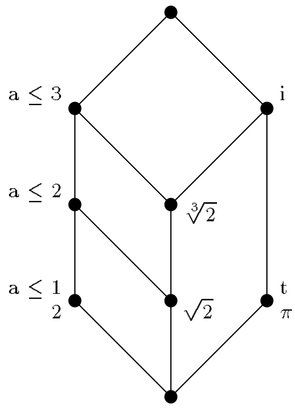



Abbildung 3.6: Der Begriffsverband des skalierten Kontextes für reelle Zahlen

Die (schlichte) Skalierung mehrwertiger Kontexte ist in der formalen Begriffsanalyse bereits bekannt – sie war bisher die einzige Methode, mehrwertige Kontexte zu analysieren. Da wir Beschreibungen allerdings erst in dieser Arbeit eingeführt haben, definierte man Skalierungen bisher auf eine andere Weise. Wir vergleichen nun die herkömmliche Formulierung (nach [GaWi96]) mit der neuen und werden sehen, daß diese äquivalent sind.

Bei der klassischen Formulierung der Skalierung mehrwertiger Kontexte ordnet man einem mehrwertigen Kontext mit Hilfe einer Reihe von einwertigen Kontexten, den sogenannten Skalen, einen weiteren einwertigen Kontext zu.

**3.5.5. Definition.** Eine *Skala* zu einem Merkmal $m$ eines mehrwertigen Kontextes ist ein einwertiger Kontext $\mathbb{S}_m = (G_m, M_m, I_m)$ mit $m(G) \subseteq G_m$. Die Gegenstände einer Skala nennen wir *Skalenwerte*, die Merkmale *Skalenmerkmale*.

Jede Skala übersetzt die Werte, die ein Gegenstand in je einem mehrwertigen Merkmal einnehmen kann (die Skalenwerte), in einwertige Merkmale (die Skalenmerkmale). Für die weitere Übersetzung der Skalenmerkmale in die einwertigen Merkmale des neuen Kontextes gibt es verschiedene Methoden. Wir betrachten hier lediglich die einfachste, die der *(klassischen) schlichten Skalierung.* Dabei sind die Merkmale des einwertigen Kontextes einfach die disjunkte Vereinigung der Skalenmerkmale, d.h. jedes einwertige Merkmal hängt genau von einem mehrwertigen Merkmal ab (über eine Skala). Die Disjunktheit der Skalenmerkmale wird künstlich erreicht, indem man $\{m\} \times M_m$ verwendet.

**3.5.6. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein mehrwertiger Kontext und sei zu jedem $m \in M$ eine Skala $\mathbb{S}_m = (G_m, M_m, I_m)$ gegeben. Dann ist $\widehat{\mathbb{K}} = (G, \hat{M}, \hat{I})$ der von $\mathbb{K}$ *abgeleitete Kontext bezüglich (klassischer) schlichter Skalierung*, falls gilt:

1. die Gegenstandsmenge bleibt gleich.
2. die Merkmalsmenge ist die disjunkte Vereinigung der Skalenmerkmale:

$$\hat{M} := \bigcup_{m \in M} \{m\} \times M_m$$

3. Ein Gegenstand $g$ hat im neuen Kontext das Merkmal $(m, a) \in \hat{M}$ (wobei $m \in M$ ein mehrwertiges Merkmal von $\mathbb{K}$ und $a \in M_m$ ein Skalenmerkmal von $S_m$ ist), falls $g$ im Definitionsbereich von $m$ liegt, und der Wert $m(g)$ in der Skala $\mathbb{S}_m$ mit $a$ inzidiert:

$$(g, (m, a)) \in \hat{I} :\Leftrightarrow g \in \operatorname{dom}(m) \wedge (m(g), a) \in I_m$$

**3.5.7. Beispiel.** Wir haben den Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ der reellen Zahlen bereits in Beispiel 3.5.4 mit Hilfe der in dieser Arbeit eingeführten Formulierungen skaliert. Den gleichen einwertigen Kontext erreicht man durch Skalierung von $\mathbb{K}$ im klassischen Sinne, mit folgenden Skalen:

| $\mathbb{S}_\mathrm{i}$ | i |
|---|---|
| × | × |

| $\mathbb{S}_\mathrm{a}$ | $\mathrm{a} \leq 1$ | $\mathrm{a} \leq 2$ | $\mathrm{a} \leq 3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × |
| 2 | | × | × |
| 3 | | | × |

| $\mathbb{S}_\mathrm{t}$ | t |
|---|---|
| × | × |

(Wir haben in diesem Beispiel die Skalenmerkmale eindeutig benannt, so daß wir die $M_m$ nicht mehr künstlich disjunkt zu machen brauchen. Das heißt, wir können $\hat{M} := M_\mathrm{i} \cup M_\mathrm{a} \cup M_\mathrm{t} = \{\mathrm{i}, \mathrm{a} \leq 1, \mathrm{a} \leq 2, \mathrm{a} \leq 3, \mathrm{t}\} = \tilde{M}$ setzen.)

Nachdem wir nun beide Varianten der Skalierung formuliert haben, zeigen wir noch, daß sie äquivalent sind:

**3.5.8. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ ein mehrwertiger Kontext.*

1. *Sei $\widehat{\mathbb{K}} = (G, \hat{M}, \hat{I})$ der von $\mathbb{K}$ abgeleitete Kontext bzgl. (klassischer) schlichter Skalierung mit Hilfe der Skalen $\mathbb{S}_m = (G_m, M_m, I_m)$ $(m \in M)$.*
   *Wir setzen*
   $$Y_m := \{C' | C \subseteq M_m\}.$$
   *(Offensichtlich ist mit dem $'$ bei $C'$ die Ableitung in der Skala $\mathbb{S}_m$ gemeint.) Diese $Y_m$, $m \in M$, sind jeweils $\wedge$-Unterhalbverbände von $\mathfrak{P}(W)$, also erhalten wir mit*
   $$Y := \{B \in \dot{\mathfrak{P}}(W)^M | B(m) \in \dot{Y}_m, \forall m \in M\}$$
   *einen schlicht skalierten Kontext $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}(G), Y, \varphi_Y)$ zu $\mathbb{K}$. Weiter sind die Kontexte $\widehat{\mathbb{K}}$ und $\mathbb{K}_Y$ isomorph.*

2. *Seien* $Y_m \subsetneq \mathfrak{P}(W)$ $\wedge$*-Unterhalbverbände für alle* $m \in M$*, das heißt mit* $Y := \{B \in \dot{\mathfrak{P}}(W)^M | B(m) \in \dot{Y}_m, \forall m \in M\}$ *ist ein schlicht skalierter Kontext* $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}(G), Y, \varphi_Y)$ *zu* $\mathbb{K}$ *gegeben.*
   *Wir wählen in jedem* $Y_m$*,* $m \in M$*, eine* $\wedge$*-dichte Teilmenge*
   $$M_m \subseteq Y_m$$
   *und definieren damit die Skalen* $\mathbb{S}_m := (W, M_m, I_m)$ *mit*
   $$(w, a) \in I_m :\Leftrightarrow w \in a.$$
   *Dann ist* $\mathbb{K}_Y$ *isomorph zum einwertigen Kontext* $\widehat{\mathbb{K}} = (G, \hat{M}, \hat{I})$*, welcher aus* $\mathbb{K}$ *durch (klassische) schlichte Skalierung mit den Skalen* $\mathbb{S}_m$ *entstanden ist.*

*Beweis:*
1. Ohne Einschränkung sei $G_m = W$ für alle $m \in M$. Dann sind die angegebenen $Y_m$, $m \in M$, jeweils $\wedge$-Unterhalbverbände von $\mathfrak{P}(W)$: Für eine beliebige Indexmenge $I$ und jedes $i \in I$ sei $B_i \in Y_m$. Dann gibt es jeweils ein $C_i \in M_m$ mit $C_i' = B_i$ $(i \in I)$. Nach 1.4.7(2) ist also $\bigcap\{B_i | i \in I\} = \bigcap\{C_i' | i \in I\} = (\bigcup\{C_i | i \in I\})' \in Y_m$.
Damit ist $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}(G), Y, \varphi_Y)$ ein schlicht skalierter Kontext zu $\mathbb{K}$ im Sinne von 3.5.1.
Um die Isomorphie von $\mathbb{K}_Y$ und $\widehat{\mathbb{K}}$ zu zeigen, betrachten wir den inzidenzisomorphen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ zu $\mathbb{K}_Y$ : Dazu definieren wir spezielle Beschreibungen in $Y$, welche eine $\vee$-dichte Teilmenge in $Y$ bilden: Für $m \in M$ und $a \in M_m$ sei die Beschreibung $m = a$ wie folgt:

$$m = a \colon M \to \dot{\mathfrak{P}}(W), n \mapsto \begin{cases} a' & \text{falls}\, n = m \\ \delta & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir setzen also $\tilde{M} := \{m = a | m \in M, a \in M_m\}$. Es ist leicht einzusehen, daß diese Menge $\vee$-dicht in $Y$ ist (Die $a'$, $a \in M_m$ sind jeweils $\wedge$-dicht in $Y_m$). Für die Inzidenzrelation $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{G,\tilde{M}}(\varphi_Y)$ gilt weiter (mit 3.5.2(2)):

$$\begin{aligned}
(g, m = a) \in \tilde{I} &\Leftrightarrow \quad (m = a) \leq \varphi_Y(g) \\
&\Leftrightarrow \quad (m = a) \leq \dot{\varphi}(g) \\
&\Leftrightarrow \quad \dot{\varphi}(g)(n) \subseteq (m = a)(n) \qquad \forall n \in M \\
&\Leftrightarrow \qquad m(g) \in a' \quad (\text{und}\, g \in \mathrm{dom}(m)) \\
&\Leftrightarrow \quad (m(g), a) \in I_m \quad (\text{und}\, g \in \mathrm{dom}(m)) \\
&\Leftrightarrow (g, (m, a)) \in \hat{I}
\end{aligned}$$

Wir können also einen Inzidenzisomorphismus $\gamma = (\gamma_X, \gamma_Y)$ mit

$$\begin{aligned}
\gamma_X &: G \to G, g \mapsto g \\
\gamma_Y &: \tilde{M} \to \hat{M}, (m = a) \mapsto (m, a)
\end{aligned}$$

zwischen den Kontexten $\widetilde{\mathbb{K}}$ und $\widehat{\mathbb{K}}$ angeben, die Kontexte sind also isomorph. Da $\widetilde{\mathbb{K}}$ inzidenzisomorph zu $\mathbb{K}_Y$ ist, folgt schließlich die Isomorphie von $\mathbb{K}_Y$ und$\widehat{\mathbb{K}}$.

2. Die Rückrichtung zeigen wir analog:
Wir betrachten den zu $\mathbb{K}_Y$ inzidenzisomorphen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (G, \tilde{M}, \tilde{I})$ mit $\tilde{M}$ wie eben. $\tilde{M} := \{m = a | m \in M, a \in M_m\}$ ist $\vee$-dicht in $\dot{\mathfrak{P}}(W)^M$, da $M_m$ für alle $m \in M$ $\wedge$-dicht in $\mathfrak{P}(W)$ ist. Und $\tilde{I}$ sei die Inzidenzrelation $\tilde{I} = \mathrm{IR}(G, \tilde{M}, \varphi_Y)$. Damit gilt wieder die Äquivalenz $(g, m = a) \in \tilde{I} \Leftrightarrow (g, (m, a)) \in \hat{I}$ (wie in (1)). Also sind $\widetilde{\mathbb{K}}$ und $\widehat{\mathbb{K}}$ isomorph, und damit auch $\mathbb{K}_Y$ und $\widehat{\mathbb{K}}$. □

Es bleibt noch nachzuprüfen, inwieweit andere Arten von (klassischen) Skalierungen (d.h. nicht schlichte Skalierungen, in [GaWi96] wird diesbezüglich auf [GaWi89] verwiesen) durch die hier neu eingeführte Definition mittels Teilkontexten abgedeckt werden können.

Eine Implementierung der schlichten Skalierung auf dem Computer verlangt viel Benutzerinteraktion – der Anwender muß die Skalen für jedes Merkmal per Hand definieren. Dies ist erwünscht, wenn ein mit dem Programm vertrauter Anwender ein Problem erschöpfend behandeln will, denn er kann dann problemorientiert die für ihn interessanten Begriffe erzeugen.

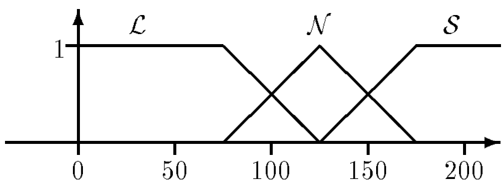
Für einen ersten Überblick über ein Anwendungsproblem sind aber zusätzlich Verfahren sinnvoll, die mit wenig Aufwand des Anwenders bereits sinnvolle Ergebnisse liefern, d.h. übersichtliche Begriffsverbände. Um diese Möglichkeit zur Verfügung zu stellen, kann man Standardskalierungen implementieren. In [GaWi96] sind hierzu einige mögliche Standardskalen definiert.

Auch hier wären weitere Analysen interessant: Man könnte untersuchen, welche $\vee$-Unterhalbverbände zu den entsprechenden Standardskalen gehören.

## 3.6 Fuzzy-wertige Kontexte

In der Praxis sind zu Merkmalen wie Alter oder Geschwindigkeit oft keine exakte Werte bekannt. Man weiß nur, daß etwas „ziemlich alt“ oder „sehr schnell“ ist.

Solche linguistischen Ausdrücke kann man durch unscharfe Mengen beschreiben. Beispielsweise kann man die Geschwindigkeit von Autos durch die unscharfen Mengen $\mathcal{L}, \mathcal{N}$ und $\mathcal{S}$ beschreiben, d.h. durch Abbildungen $\mathbb{R}^+ \to L$, welche respektive für die linguistischen Ausdrücke „langsam“, „normal“, „schnell“ stehen. Benutzt man eine Fuzzy-Algebra über $L = [0, 1]$, so könnte man sich auf folgende Definition einigen:



Für Situationen, in denen nur unscharfe Angaben bekannt sind, eignet sich der $L$-Fuzzy-wertige Kontext, welcher – wie auch der $L$-Fuzzy-Kontext (siehe Abschnitt 2.2) – von S. Umbreit in [Um94] eingeführt wurde:

Hierzu sei $(L, \wedge, \vee, \cdot, \rightarrow)$ in diesem Abschnitt stets eine Fuzzy-Algebra.

**3.6.1. Definition.** Als *$L$-Fuzzy-wertigen Kontext* verstehen wir ein Quadrupel $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$, wobei $G$ eine Gegenstandsmenge, $M$ eine Merkmalsmenge, $W$ die Menge von Werten und $R$ eine dreiwertige Relation zwischen $G$, $M$ und $\mathfrak{P}_L(W)$ ist, so daß gilt: Zu jedem $g \in G$ und $m \in M$ gibt es genau eine $L$-Fuzzy-Teilmenge $\mathcal{U} \in \mathfrak{P}_L(W)$ mit $(g, m, \mathcal{U}) \in R$.

Indem wir in der letzten Forderung „genau ein" anstatt „höchstens ein" stehen haben, ist jeder Fuzzy-wertige Kontext vollständig. Dies ist keine Einschränkung, da man notfalls eine unscharfe Menge „Keine Angaben": $W \to L, w \mapsto c$ definieren kann mit $c \in L$. (Umbreit hat zwar in der Definition des $L$-Fuzzy-wertigen Kontextes nicht die Vollständigkeit gefordert, in der weiteren Arbeit setzt sie aber implizit voraus, daß zu jedem $g$ und $m$ ein $\mathcal{U}$ mit $(g, m, \mathcal{U}) \in R$ existiert.)

Wir können die unscharfen Mengen $\mathcal{U} \in \mathfrak{P}_L(W)$ als linguistische Werte der linguistischen Variablen $m \in M$ auffassen. Demnach schreiben wir auch oft $m(g) = \mathcal{U}$ statt $(g, m, \mathcal{U}) \in R$.

**3.6.2. Beispiel.** Folgendes Beispiel ist in [Um94] auf Seite 34 zu finden: Es soll bei der Entscheidung eines Fahrzeugverkäufers helfen, welches Fahrzeug am besten den Wünschen eines Kunden entspricht. Gegenstände sind die zum Verkauf angebotenen Fahrzeuge und es werden die Merkmale Alter, Preis, Benzinverbrauch und Höchstgeschwindigkeit betrachtet. Die Daten sind teilweise in Form linguistischer Werte angegeben, zu denen man noch passende unscharfe Mengen definieren müßte.

| | Alter | Preis | Verbrauch | Geschwindigkeit |
|---|---|---|---|---|
| F1 | neu | teuer | sparsam | ziemlich schnell |
| F2 | weniger als 3 J. | etwa 45 TDM | ziemlich sparsam | 180-200 km/h |
| F3 | fast neu | zw. 50 und 60 TDM | hoch | schnell |
| F4 | etwa 5 J. | weniger als 20 TDM | 8-9 Liter | 180 km/h |
| F5 | 5 - 10 J. | etwa 10 TDM | hoch | ziemlich schnell |
| F6 | alt | billig | sparsam | nicht sehr schnell |
| F7 | neu | 32-40 TDM | sehr sparsam | zw. 140 und 160 km/h |

Um Ableitung und Begriff zu definieren, ordnen wir dem Quadrupel $(G, M, W, R)$ einen Verbandskontext $(X, Y, \varphi)$ zu. Hierzu benötigen wir zwei vollständige Verbände und eine Galoisverbindung. Als erster Verband $X$ bietet sich die $L$-Fuzzy-Potenzmenge von $G$, $\mathfrak{P}_L(G)$ an. Für $Y$ definieren wir – ähnlich wie beim mehrwertigen Kontext – den Verband der $L$-Fuzzy-Beschreibungen:

**3.6.3. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$ ein $L$-Fuzzy-wertiger Kontext. Eine *L-Fuzzy-Beschreibung* in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung $\mathcal{B} : M \to \mathfrak{P}_L(W)$.

**3.6.4. Hilfssatz.** *Die Menge $\mathfrak{P}_L(W)^M$ der L-Fuzzy-Beschreibungen in $\mathbb{K}$ bildet mit der Teilordnung*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2 :\Leftrightarrow \mathcal{B}_1(m) \supseteq \mathcal{B}_2(m) \quad \forall m \in M \\ \Leftrightarrow \mathcal{B}_1(m)(w) \geq \mathcal{B}_2(m)(w) \quad \forall m \in M, \forall w \in W \end{aligned}$$

*einen vollständigen Verband.*

*Beweis:* Analog zu 3.2.2. □

Schließlich benötigen wir noch eine Galoisverbindung zwischen diesen beiden Verbänden. Hierzu verwenden wir ein Hilfsmittel, nämlich die Abbildung $m$, welche eine $L$-Fuzzy-Teilmenge $\mathcal{A}$ von $G$ auf eine $L$-Fuzzy-Teilmenge $\mathcal{U}$ von $W$ abbildet, sodaß die Aussage „$(g \in \mathcal{A}) \Rightarrow (m(g) \subseteq_L \mathcal{U})$“ für jedes $g \in G$ den Quasiwahrheitswert 1 bekommt:

$$\begin{aligned} m \ &: \ \mathfrak{P}_L(G) \to \mathfrak{P}_L(W), \mathcal{A} \mapsto m(\mathcal{A}) \quad \text{mit} \\ m(\mathcal{A}) &:= \bigcap \{\mathcal{U} \in \mathfrak{P}_L(W) | \bigwedge_{g \in G} ([g \in \mathcal{A}] \to [m(g) \subseteq_L \mathcal{U}]) = 1\} \\ &= \bigcap \{\mathcal{U} \in \mathfrak{P}_L(W) | \bigwedge_{g \in G} (\mathcal{A}(g) \to \bigwedge_{w \in W} (m(g)(w) \to \mathcal{U}(w))) = 1\} \end{aligned}$$

Die Bedingung für die $\mathcal{U}$ können wir umformen:

$$\begin{aligned} & 1 = \bigwedge_{g \in G} \Big( \mathcal{A}(g) \to \bigwedge_{w \in W} (m(g)(w) \to \mathcal{U}(w)) \Big) \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{A}(g) \leq \bigwedge_{w \in W} (m(g)(w) \to \mathcal{U}(w)) \quad \forall g \in G \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{A}(g) \cdot m(g)(w) \leq \mathcal{U}(w) \quad \forall g \in G, \forall w \in W \\ \Leftrightarrow \quad & \bigvee_{g \in G} \mathcal{A}(g) \cdot m(g)(w) \leq \mathcal{U}(w) \quad \forall w \in W \end{aligned}$$

also können wir $m(\mathcal{A})$ wie folgt angeben:

$$m(\mathcal{A})(w) = \bigvee_{g \in G} \mathcal{A}(g) \cdot m(g)(w)$$

Mit diesem Hilfsmittel definieren wir eine Galoisverbindung $(\varphi, \varphi^d)$:

**3.6.5. Hilfssatz.** *Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$ ein L-Fuzzy-wertiger Kontext. Folgende Abbildungen definieren eine Galoisverbindung:*

$$\begin{aligned} &\varphi \colon \mathfrak{P}_L(G) \to \mathfrak{P}_L(W)^M \ \textit{mit} \ \varphi(\mathcal{A}) \colon M \to \mathfrak{P}_L(W), m \mapsto m(\mathcal{A}) \\ &\psi \colon \mathfrak{P}_L(W)^M \to \mathfrak{P}_L(G) \ \textit{mit} \ \psi(\mathcal{B}) \colon G \to L, g \mapsto [\forall m \in M : m(g) \subseteq_L \mathcal{B}(m)] \\ &\qquad \textit{d.h.} \ \psi(\mathcal{B})(g) = \bigwedge_{m \in M} \bigwedge_{w \in W} m(g)(w) \to \mathcal{B}(m)(w) \end{aligned}$$

*Beweis:* Wir rechnen das Kriterium 1.4.2 nach: $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{B} \leq \varphi(\mathcal{A})$
Sei $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{B})$. Nach Definition von $\subseteq$ gilt dies genau dann, wenn für alle $g \in G$ die Ungleichung $\mathcal{A}(g) \leq \psi(\mathcal{B})(g)$ erfüllt ist. Setzen wir die Definition von $\psi$ ein, so ist $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{B})$ genau dann, wenn gilt:

$$\begin{array}{lrl} & \mathcal{A}(g) \leq m(g)(w) \to \mathcal{B}(m)(w) & \forall g \in G, \forall m \in M, \forall w \in W \\ \Leftrightarrow & \mathcal{A}(g) \cdot m(g)(w) \leq \mathcal{B}(m)(w) & \forall g \in G, \forall m \in M, \forall w \in W \\ \Leftrightarrow & \bigvee_{g \in G} \mathcal{A}(g) \cdot m(g)(w) \leq \mathcal{B}(m)(w) & \forall m \in M, \forall w \in W \\ \Leftrightarrow & m(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(m) & \forall m \in M \\ \Leftrightarrow & \varphi(\mathcal{A})(m) \subseteq \mathcal{B}(m) & \forall m \in M \\ \Leftrightarrow & \mathcal{B} \leq \varphi(\mathcal{A}) & \end{array}$$ $\square$

Mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse können wir nun einen Verbandskontext definieren:

**3.6.6. Satz.** *Sei $L$ eine Fuzzy-Algebra, und sei $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$ ein $L$-Fuzzy-wertiger Kontext. Wir ordnen $\mathbb{K}$ dem Verbandskontext*

$$\mathbb{K} = (\mathfrak{P}_L(G), \mathfrak{P}_L(W)^M, \varphi)$$

*zu, wobei $\varphi$ wie in 3.6.5 definiert ist, und erhalten somit Ableitungen und Begriffe in $\mathbb{K}$. Die Menge der Begriffe $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ bildet einen vollständigen Verband.*

Um die bereits bekannten Algorithmen für einwertige Kontexte (z.B. zur Berechnung des Begriffsumfangs) nutzen zu können, geben wir einen isomorphen einwertigen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}}$ an. Wir wissen bereits aus Beispiel 2.3.1(3), daß für eine $\vee$-dichte Teilmenge $\bar{L} \subseteq L$ folgende Menge $\vee$-dicht in $\mathfrak{P}_L(G)$ ist:

$$\tilde{G} := \{l \cdot g | g \in G, l \in \bar{L}\}$$

Ich habe kein generell zufriedenstellendes Verfahren gefunden, das eine $\vee$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{P}_L(W)^M$ erzeugt. Wir besprechen deshalb mehrere Ansätze:

### Ansatz 1

Um eine $\vee$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{P}_L(W)^M$ angeben zu können, benötigen wir $\wedge$-dichte Teilmengen von $\mathfrak{P}_L(W)$. Dazu definieren wir zunächst für eine Grundmenge $X$ die Fuzzy-Teilmengen:

$$\overline{(l, x)} \colon X \to L, a \mapsto \begin{cases} l \text{ falls } a = x \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

**3.6.7. Hilfssatz.** *Sei $X$ Grundmenge und $\underline{L} \subseteq L$ eine $\wedge$-dichte Teilmenge. Dann ist die Menge*

$$\{\overline{(l,x)} | x \in X, l \in \underline{L}\}$$

*$\wedge$-dicht in $\mathfrak{P}_L(X)$.*

Wir erhalten eine $\vee$-dichte Teilmenge in $\mathfrak{P}_L(W)^M$, indem wir folgende Beschreibungen betrachten:

$$([m=a] \leq l)\colon M \to \mathfrak{P}_L(W), n \mapsto \begin{cases} \overline{(l,a)} & \text{falls}\, n = m \\ w \mapsto 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\text{d.h.,} \quad ([m=a] \leq l)(n)(w) \; = \begin{cases} l \text{ falls}\, n = m \,\text{und}\, w = a \\ 1 \text{ sonst} \end{cases}$$

**3.6.8. Hilfssatz.** *Sei $\underline{L}$ $\wedge$-dichte Teilmenge von $L$. Dann ist folgende Menge $\vee$-dicht in $\mathfrak{P}_L(W)^M$:*

$$\tilde{M} := \{([m=a] \leq l) \in \mathfrak{P}_L(W)^M | m \in M, a \in W, l \in \underline{L}\}$$

*Beweis:* Dies folgt aus der Definition der Ordnung in $\mathfrak{P}_L(W)^M$ und der $\wedge$-Dichtheit der $\overline{(l,a)}$ in $\mathfrak{P}_L(W)$. □

Betrachten wir nun die Inzidenzrelation $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi)$ zum Verbandskontext $\mathbb{K} = (\mathfrak{P}_L(G), \mathfrak{P}_L(W)^M, \varphi)$:

$$\begin{aligned}
& (l_g \cdot g, [m=a] \leq l_m) \in \tilde{I} \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi(l_g \cdot g) \geq ([m=a] \leq l_m) \\
\Leftrightarrow \quad & \varphi(l_g \cdot g)(n) \subseteq ([m=a] \leq l_m)(n) \ \forall n \in M \\
\Leftrightarrow \quad & m(l_g \cdot g) \subseteq \overline{(l_m, a)} \\
\Leftrightarrow \quad & \bigvee_{h \in G} ((l_g \cdot g)(h) \cdot m(h)(w)) \leq \overline{(l_m, a)}(w) \qquad \forall w \in W \\
\Leftrightarrow \quad & \bigvee_{h \in G} ((l_g \cdot g)(h) \cdot m(h)(a)) \leq l_m \\
\Leftrightarrow \quad & l_g \cdot m(g)(a) \leq l_m \\
\Leftrightarrow \quad & l_g \leq m(g)(a) \to l_m
\end{aligned}$$

Damit können wir den inzidenzisomorphen Kontext $\tilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ angeben:

**3.6.9. Satz.** *Sei $L$ eine Fuzzy-Algebra und $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$ ein $L$-Fuzzy-wertiger Kontext. Ist $\bar{L}$ $\vee$-dicht, und $\underline{L}$ $\wedge$-dicht in $L$, so ist $\mathbb{K}$ isomorph zum einwertigen Kontext $\tilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$, wobei*

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &:= \{l \cdot g \in \mathfrak{P}_L(G) | g \in G, l \in \bar{L}\} \\
\tilde{M} &:= \{[m=a] \leq l | \in \mathfrak{P}_L(W)^M | m \in M, a \in W, l \in \underline{L}\}
\end{aligned}$$

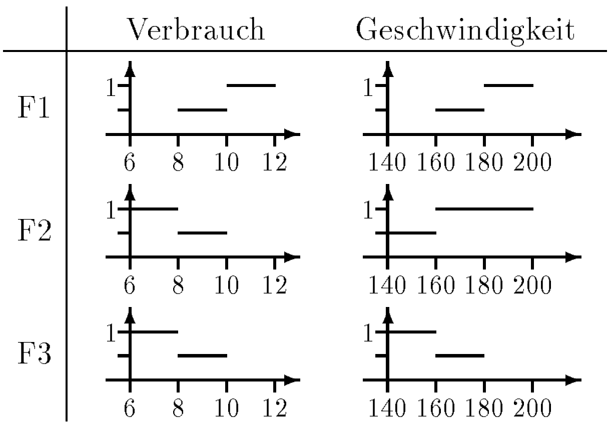
*und für alle $g \in G$, $m \in M$, $w \in W$, sowie $l_g \in \overline{L}$ und $l_m \in \underline{L}$ gelte:*

$$(l_g \cdot g, [m=a] \leq l_m) \in \tilde{I} \Leftrightarrow l_g \leq m(g)(a) \to l_m.$$

**3.6.10. Beispiel.** Als Beispiel eines $L$-Fuzzy-wertigen Kontextes betrachten wir eine ähnliche Tabelle wie 3.6.2 (vgl auch [Um94], Seite 40ff):

| | Verbrauch | Geschwindigkeit |
|---|---|---|
| F1 | hoch | schnell |
| F2 | niedrig | ziemlich schnell |
| F3 | niedrig | langsam |

Als Fuzzy-Algebra verwenden wir die dreiwertige Lukasiewicz-Algebra, wie wir sie in Bsp. 2.2.13 (auf Seite 29) definiert haben. Die in der Tabelle auftretenden linguistischen Werte fassen wir als Fuzzy-Mengen auf, welche wir wie folgt charakterisieren:




Um eine endliche Wertemenge zu bekommen, diskretisieren wir den Wertebereich: Wie wir in der Tabelle sehen sind die linguistischen Werte jeweils auf Intervallen konstant. Wir nehmen also aus jedem Intervall einen Wert, und erhalten so eine endliche Wertemenge. Desweiteren ist es sinnvoll, anstatt einer globalen Wertemenge separate Wertemengen für jedes Merkmal zu betrachten: $W := W_V \cup W_G$. ($V$ steht für Verbrauch und $G$ für Geschwindigkeit):

$$\begin{aligned} W_V &:= \{7, 9, 11\} \text{ und} \\ W_G &:= \{150, 170, 190\} \end{aligned}$$

Nun können wir für die Mengen $\bar{L} := \{\frac{1}{2}, 1\}$ und $\underline{L} = \{0, \frac{1}{2}\}$ die Gegenstandsmenge $\tilde{G}$ und Merkmalsmenge $\tilde{M}$ des einwertigen Kontextes $\widetilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{G} &:= \{\frac{1}{2}\text{F1}, \text{F1}, \frac{1}{2}\text{F2}, \text{F2}, \frac{1}{2}\text{F3}, \text{F3}, \frac{1}{2}\text{F4}, \text{F4}\} \\ \tilde{M} &:= \{[V = 7] \leq \frac{1}{2}, [V = 7] \leq 0, \ldots, [V = 11] \leq \frac{1}{2}, [V = 11] \leq 0, \\ &\qquad [G = 150] \leq \frac{1}{2}, [G = 150] \leq 0, \ldots, [G = 190] \leq \frac{1}{2}, [G = 190] \leq 0\} \end{aligned}$$

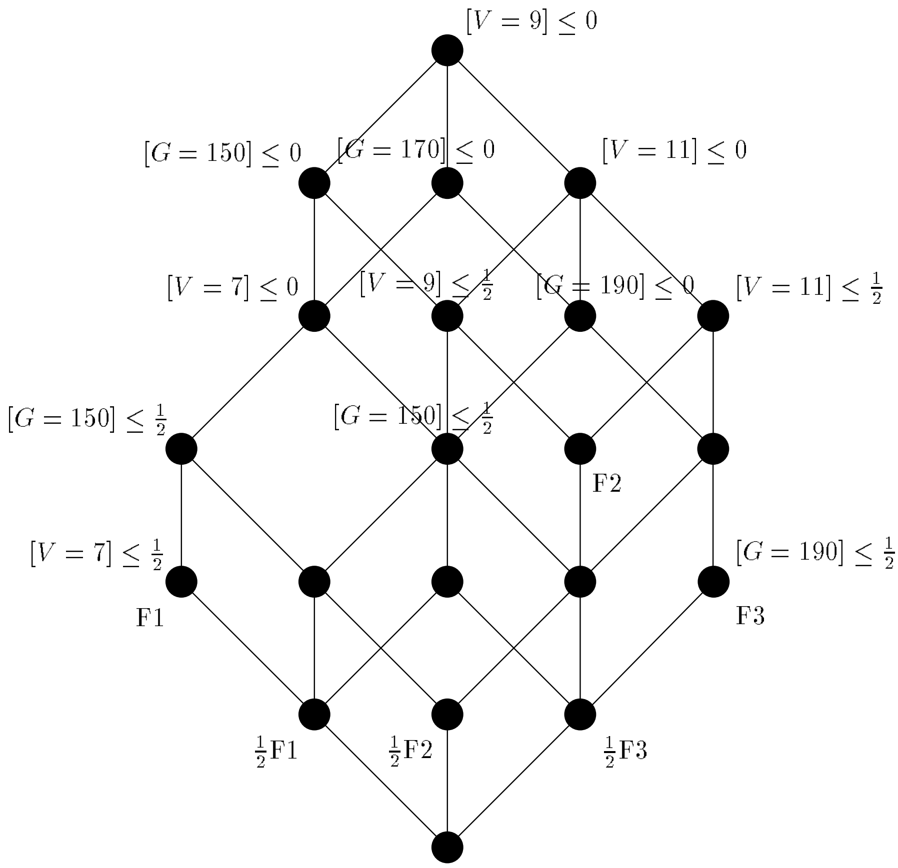



Abbildung 3.7: Der Begriffsverband zum Kontext Autos

Die Inzidenzrelation $\tilde{I}$ sieht dann wie folgt aus:

| | $[V=7] \leq \frac{1}{2}$ | $[V=7] \leq 0$ | $[V=9] \leq \frac{1}{2}$ | $[V=9] \leq 0$ | $[V=11] \leq \frac{1}{2}$ | $[V=11] \leq 0$ | $[G=150] \leq \frac{1}{2}$ | $[G=150] \leq 0$ | $[G=170] \leq \frac{1}{2}$ | $[G=170] \leq 0$ | $[G=190] \leq \frac{1}{2}$ | $[G=190] \leq 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$F1 | × | × | × | × | × | | × | × | × | × | × | |
| F1 | × | × | × | | | | × | × | × | | | |
| $\frac{1}{2}$F2 | × | | × | × | × | × | × | × | × | | × | |
| F2 | | | × | | × | × | × | | | | | |
| $\frac{1}{2}$F3 | × | | × | × | × | × | × | | × | × | × | × |
| F3 | | | × | | × | × | | | × | | × | × |

Wir haben also einen inzidenzisomorphen, klassischen Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ definiert und können damit den Begriffsverband erzeugen (siehe Abb. 3.7).

Ein Nachteil dieses Ansatzes ist die Notwendigkeit einer $\wedge$-dichten Teilmenge $\underline{L}$ von $L$. Es wäre schön, wenn wir auf diese verzichten, und stattdessen $\tilde{M}$ durch die $\vee$-dichte Teilmege $\bar{L}$ definieren könnten. Letztere benötigen wir ja bereits für $\tilde{G}$. Falls $L$ eine zusätzliche Eigenschaft besitzt so können wir dies durch folgenden zweiten Ansatz erreichen:

### Ansatz 2

Sei $L$ hierzu *komplementärer Verband*, d.h. für jedes $l \in L$ gibt es ein Komplement $\neg l$, sodaß $l \wedge \neg l = 0$ und $l \vee \neg l = 1$ gilt. Dann können wir unter Ausnutzung dieser Eigenschaft wie folgt vorgehen:

**3.6.11. Bemerkung.** Ist $L$ komplementärer Verband, so ist für eine $\vee$-dichte Teilmenge $\bar{L} \subseteq L$ folgende Menge $\wedge$-dicht in $L$:

$$\underline{L} := \{l \to 0 | l \in \bar{L}\}$$

*Beweis:* Sei $a \in L$. Aus $x = \bigvee\{l \in \bar{L} | l \leq x\}$ für alle $x \in L$ folgt

$$\begin{aligned}\bigwedge\{l \to 0 | l \in \bar{L} \text{ und } l \leq a \to 0\} &= \left(\bigvee\{l \in \bar{L} | l \leq a \to 0\}\right) \to 0 \\ &= (a \to 0) \to 0\end{aligned}$$

In [Um94], Hilfssatz 1.2 auf Seite 7 wird folgendes gezeigt: Ist $(L, \wedge, \vee, \cdot, \to)$ eine Fuzzy-Algebra, und ist dabei $(L, \wedge, \vee)$ komplementärer Verband, so ist für jedes $a \in L$ das Komplement $\neg a$ eindeutig bestimmt durch $\neg a = a \to 0$. Also ist $a = \neg(\neg a) = (a \to 0) \to 0$. Wir können also $a = (a \to 0) \to 0$ als Infimum über Elemente $l \to 0$ mit $l \in \bar{L}$ darstellen. $\square$

Definieren wir das Komplement zu einer $L$-Fuzzy-Menge $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(X)$ durch:

$$\overline{\mathcal{A}}\colon X \to L, x \mapsto (\mathcal{A}(x) \to 0)$$

so erhalten wir:

**3.6.12. Folgerung.** Ist $L$ komplementären Verband, so ist durch eine $\vee$-dichte Teilmenge $\bar{L} \subseteq L$ auch eine $\wedge$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{P}_L(W)$ gegeben:

$$\{\overline{l \cdot x} | l \in \bar{L}, x \in X\}.$$

Die $\vee$-irreduziblen Elemente von $\mathfrak{P}_L(W)^M$ können wir dann mit Hilfe der Beschreibungen $[m = a] \neq l$ angeben:

$$([m = a] \neq l) := ([m = a] \leq l \to 0)\colon M \to \mathfrak{P}_L(W), n \mapsto \begin{cases} \overline{l \cdot a} & \text{falls } n = m \\ w \mapsto 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit können wir $\tilde{M}$ auch wie folgt beschreiben:

$$\tilde{M} = \{[m = a] \neq l) | m \in M, a \in W, l \in \bar{L}\}$$

Und es gilt (mit der Formel für $\tilde{I}$ aus 3.6.9):

$$\begin{aligned} & (l_g \cdot g, [m = a] \neq l_m) \in \tilde{I} \\ \Leftrightarrow\ & (l_g \cdot g, [m = a] \leq l_m \to 0) \in \tilde{I} \\ \Leftrightarrow\ & l_g \leq m(g)(a) \to (l_m \to 0) \\ \Leftrightarrow\ & l_g \leq l_m \to (m(g)(a) \to 0) \\ \Leftrightarrow\ & l_g \cdot l_m \leq m(g)(a) \to 0 \end{aligned}$$

**3.6.13. Satz.** *Ist $L$ komplementäre Fuzzy-Algebra, so können wir zum $L$-Fuzzy-wertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$ folgenden isomorphen einwertigen Kontext angeben: Sei dazu $\bar{L}$ $\vee$-dicht in $L$, sowie:*

$$\begin{aligned} \tilde{G} &:= \{l \cdot g \in \mathfrak{P}_L(G) | g \in G, l \in \bar{L}\} \\ \tilde{M} &:= \{[m = a] \neq l \in \mathfrak{P}_L(W)^M | m \in M, a \in W, l \in \bar{L}\} \end{aligned}$$

*und für alle $g \in G$, $m \in M$, $w \in W$, sowie $l_g, l_m \in \overline{L}$ gelte:*

$$(l_g \cdot g, [m = a] \neq l_m) \in \tilde{I} \Leftrightarrow l_g \cdot l_m \leq m(g)(a) \to 0.$$

*Dann ist der einwertige Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ isomorph zu $\mathbb{K}$.*

Wir erhalten im Grunde den gleichen einwertigen Kontext wie beim ersten Ansatz. Lediglich die Merkmale sind anders beschriftet. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt in der Tatsache, daß man mit einer $\vee$-dichten Teilmenge $\bar{L}$ von $L$ auskommt, und nicht eine weitere $\wedge$-dichte Teilmenge $\underline{L}$ benötigt.

**3.6.14. Beispiel.** Die Fuzzy-Algebra in Beispiel 3.6.10 ist nicht komplementär. (Für $\frac{1}{2} \in L$ gibt es kein Komplement $\neg\frac{1}{2}$.) Trotzdem bildet für $\bar{L} = \{\frac{1}{2}, 1\} \subseteq L$ die Menge $\underline{L} := \{l \to 0 | l \in \bar{L}\} = \{\frac{1}{2}, 0\}$ eine $\wedge$-dichte Teilmenge von $L$. Der Ansatz ist also anwendbar. Man könnte demnach die Merkmale $[V = 7] \leq \frac{1}{2}$, $[V = 7] \leq 0, \ldots$ auch wie folgt beschriften: $[V = 7] \neq \frac{1}{2}$, $[V = 7] \neq 1, \ldots$

### Ansatz 3

Ein Problem in unseren bisherigen Ansätzen ist, daß $\mathfrak{P}_L(W)$ in Anwendungen meist sehr groß ist – oder daß gar, wie im Beispiel, $W$ unendlich ist. Normalerweise werden im $L$-Fuzzy-wertigen Kontext aber nur wenige verschiedene Fuzzy-Werte $\mathcal{U} \in \mathfrak{P}_L(W)$ verwendet (z.B langsam, ziemlich langsam, ziemlich schnell, schnell), und wir benötigen deshalb meist gar keine $\vee$-dichte Teilmenge von $\mathfrak{P}_L(W)^M$. Wir können uns vielmehr auf einen $\vee$-Unterhalbverband von $\mathfrak{P}_L(W)^M$ beschränken, welcher unter Umständen wesentlich kleiner ist.

Zudem ist man – wie auch schon beim mehrwertigen Kontext – meist gar nicht an einem isomorphen Kontext interessiert, sondern will mittels *Skalierung* nur die für das Anwendungsproblem interessanten Begriffe untersuchen. Deshalb betrachten wir nun eine Möglichkeit, Fuzzy-wertige Kontexte zu skalieren, d.h. Teilkontexte zu erzeugen. Wählt man dabei die Skalierung genau genug, so erhält man auch einen isomorphen einwertigen Kontext.

Als Skalierung im mehrwertigen Kontext haben wir $\vee$-Unterhalbverbände der Menge aller Beschreibungen genommen (siehe 3.5.1). Analog definieren wir jetzt:

**3.6.15. Definition.** Ein Verbandskontext $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}_L(G), Y, \varphi_Y)$ heißt *Skalierung* zum Fuzzy-wertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$, wenn $Y$ $\vee$-Unterhalbverband von $\mathfrak{P}_L(W)^M$ ist, und

$$\varphi_Y(A) = \bigvee\{B \in V | B \leq \varphi(A)\}$$

gilt. Weiterhin heißt die Skalierung *schlicht,* wenn es für $m \in M$ $\wedge$-Unterhalbverbände $Y_m \subseteq \mathfrak{P}_L(W)$ gibt, sodaß

$$Y = \{B \in \mathfrak{P}_L(W)^M | B(m) \in Y_m, \forall m \in M\}$$

Wir wählen nun eine Menge von Beschreibungen $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}_L(W)^M$. Bezeichnen wir den davon erzeugten $\vee$-Unterhalbverbandes mit $Y := \{\bigvee A | A \subseteq \tilde{M}\}$, und den zugehörigen schlicht skalierten Kontext mit $\mathbb{K}_Y = (\mathfrak{P}_L(G), Y, \varphi_Y)$, so ist der klassische Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} :\hat{=} (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ mit $\tilde{I} = \mathrm{IR}_{G,\tilde{M}}(\varphi_Y)$ inzidenzisomorph zu $\mathbb{K}_Y$.

Da für eine Beschreibung $B \in \tilde{M}$ und eine Gegenstandsmenge $\mathcal{A} \in \mathfrak{P}_L(G)$ gilt: $B \leq \varphi_Y(A) \Leftrightarrow B \leq \varphi(A)$ (vgl. 3.5.2), können wir $\tilde{I}$ wie folgt angeben: Für $l \cdot g \in \tilde{G}$ und $B \in \tilde{M}$ ist

$$\begin{aligned}(l \cdot g, B) \in \tilde{I} &\Leftrightarrow B \leq \varphi(l \cdot g)\\ &\Leftrightarrow l \cdot m(g) \subseteq B(m), \forall m \in M\end{aligned}$$

**3.6.16. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (G, M, W, R)$ ein L-Fuzzy-wertiger Kontext und sei weiter $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}_L(W)^M$ eine Menge von Beschreibungen. Setzen wir:*

$$\tilde{G} := \{l \cdot g \in \mathfrak{P}_L(G) | g \in G, l \in \bar{L}\}$$

*und weiter für alle $g \in G$, $B \in \tilde{M}$, sowie $l \in \overline{L}$:*

$$(l \cdot g, B) \in \tilde{I} \Leftrightarrow l \cdot m(g) \subseteq B(m), \forall m \in M$$

*Dann existiert eine $\wedge$-erhaltende Einbettung vom Begriffsverband des klassischen Kontextes $\widetilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ nach $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$. Gilt zusätzlich für jedes $A \in \mathfrak{P}_L(G)$ und jedes $m \in M$:*

$$A'(m) = \bigwedge\{B \in \tilde{M} | A' \leq B\},$$

*so sind die Kontexte sogar isomorph.*

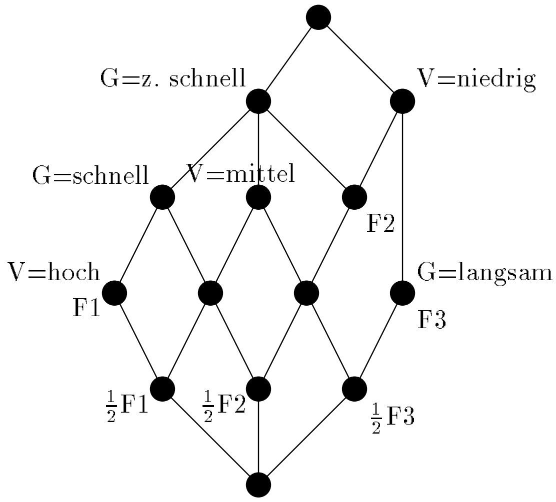



Abbildung 3.8: Ein skalierter Begriffsverband zum Kontext Autos

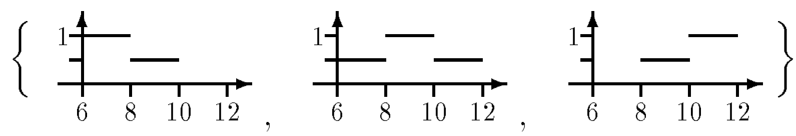
**3.6.17. Beispiel.** Wir betrachten noch einmal den $L$-Fuzzy-wertigen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, W, I)$ aus Beispiel 3.6.10 (siehe Seite 77): Man kann für die Skalierung beliebige Beschreibungen wählen, aber am einfachsten ist es, wenn man für jedes Merkmal getrennt gewisse Beschreibungen aussucht. (Das heißt, wir skalieren schlicht.) Um den Beschreibungen der Skalierung möglichst intuitive Namen geben zu können, definieren wir zunächst für $m \in M$ und $a \in \mathfrak{P}_L(W)$:

$$(m = a) : M \to (W)^M, m \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } n = m \\ w \mapsto 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun wählen für jedes Merkmal gewisse linguistische Werte, an denen wir interessiert sind. Dabei sind wir nicht an die Werte gebunden, die im $L$-Fuzzy-wertigen Kontext vorkommen. Wir verwenden diese hier aber aus Gründen der Einfachheit:

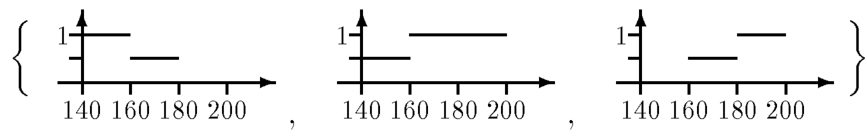
$$\tilde{W}_V = \{\text{niedrig}, \text{mittel}, \text{hoch}\}$$

$=$




$$\tilde{W}_G = \{\text{langsam}, \text{ziemlich schnell}, \text{schnell}\}$$

$=$



Definieren wir nun $\tilde{M} := \{m = a | m \in M, a \in \tilde{W}_m\}$, so erhalten wir den skalierten Kontext $\widetilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$, mit:

| $\tilde{I}$ | V=niedrig | V=mittel | V=hoch | G=langsam | G=z. schnell | G=schnell |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$F1 | | × | × | | × | × |
| F1 | | | × | | × | × |
| $\frac{1}{2}$F2 | × | × | | | × | × |
| F2 | × | | | | × | |
| $\frac{1}{2}$F3 | × | × | | × | × | |
| F3 | × | | | × | | |

Der zugehörige Begriffsverband in Abb. 3.8 ist wesentlich leichter zu interpretieren, als der Begriffsverband zu $\mathbb{K}$ (siehe Abb 3.7). Dies liegt zum einen an den intuitiveren Namen für die Merkmale, und zum anderen an der Tatsache, daß wir viele „uninteressante“ Begriffe wegskaliert haben.

# Kapitel 4

# Implikationen

Formal ist eine *Implikation* nichts weiter als ein Paar von Elementen $x, y \in V$ eines endlichen Verbandes $V$. Wir schreiben hierfür $x \to y$. Sie erhalten ihren Sinn erst durch eine weitere Definition, welche festlegt, wann eine Implikation im Verband *gilt*.

Implikationen spielen in der Begriffsanalyse eine große Rolle um Zusammenhänge zwischen Merkmalen darzustellen. Ist $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein klassischer Kontext, so bedeutet $A \to B$, daß ein Gegenstand, der mit allen Merkmalen einer Teilmenge $A \subseteq M$ inzidiert, auch die Merkmale $m \in B \subseteq M$ erfüllt. Angewendet werden solche Implikationen beispielsweise in der Wissensexploration (siehe [Boe97]).

Aber auch in der Theorie relationaler Datenbanken werden *funktionale Abhängigkeiten* in einer ähnlichen mathematischen Situation gebraucht. Sei dazu $\mathfrak{A}$ eine Menge von Attributen und $R$ eine Relation über $\mathfrak{A}$. Das heißt zu jedem Attribut $A \in \mathfrak{A}$ gibt es einen *Wertebereich* $D(A)$, und ein *Tupel* $t$ ist eine Abbildung, die jedem Attribut $A$ ein Element aus dessen Wertebereich $D(A)$ zuordnet. Schließlich ist $R$ eine Menge solcher Tupel. (Für eine ausführliche Einführung schlage man in der Literatur über relationale Datenbanken nach. Neben der Vorlesung von Prof. R. Laue [Laue], auf die ich mich hier beziehe, sei z.B. [May83] genannt.) Dann bedeutet $X \to Y$, daß je zwei Tupel $t_1, t_2 \in R$, welche auf einer Menge von Attributen $X \subseteq \mathfrak{A}$ übereinstimmen, auch in den Attributen aus $Y \subseteq \mathfrak{A}$ gleiche Werte besitzen.

Allgemein können Implikationen überall da Anwendung finden, wo ein Hüllenoperator auf einem endlichen Verband dargestellt werden soll. Wir fassen nun Ergebnisse zusammen, die in den eben genannten mathematischen Teilgebieten über Implikationen gewonnen wurden, und geben sie allgemein für Hüllenoperatoren $\gamma : V \to V$ über vollständigen Verbänden wieder.

Soweit nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben wird, seien in diesem Kapitel stets $V$ ein endlicher Verband und $\mathfrak{I}$ eine Menge von Implikationen in $V$.

## 4.1 Implikationen im endlichen Verband

Eine Implikation an sich hat keine große Aussagekraft – sie ist nach Definition lediglich ein Paar von Elementen von $V$. Bedeutung für $V$ erhält sie erst durch folgende Definition:

**4.1.1. Definition.** Ein $a \in V$ *respektiert* eine Implikation $x \to y$ in $V$ genau dann, wenn aus $x \leq a$ bereits $y \leq a$ folgt.

Betrachten wir zunächst, wie diese Definition in den oben erwähnten Anwendungsgebieten verwendet wird, um Implikationen im Kontext bzw. funktionale Abhängigkeiten zu definieren:

1. Sei $\mathbb{K} = (G, M, I)$ ein klassischer Kontext mit endlicher Merkmalsmenge. Dann sagt man, eine Implikation $A \to B$ *gilt* in $\mathbb{K}$, wenn alle Gegenstandsinhalte $g' \in \mathfrak{P}(M)$, mit $g \in G$ die Implikation respektieren.
2. Ist $\mathfrak{A}$ eine Attributenmenge, und $R$ eine Relation über $\mathfrak{A}$. Eine funktionale Abhängigkeit $X \to Y$ *gilt* in $R$, falls für je zwei Tupel $t_1, t_2 \in R$ folgende Aussage gilt: Die Menge der Attribute, in welchen $t_1$ und $t_2$ übereinstimmen, respektiert $X \to Y$.

In beiden Fällen wird für die Implikation gefordert, daß sie von gewissen Teilmengen – also von Elementen einer Potenzmenge respektiert wird. Da dies jeweils die einzige grundlegende Definition ist, wird die ganze Struktur von Implikationen durch 4.1.1 bestimmt.

Wir sagen im folgenden, $a$ respektiere eine Menge $\mathfrak{I}$ von Implikationen, falls $a$ jede Implikation $x \to y \in \mathfrak{I}$ respektiert, und bezeichnen mit

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}} := \{a \in V | a \,\text{respektiert}\, \mathfrak{I}\}$$

die Menge aller $a \in V$, welche $\mathfrak{I}$ respektieren.

**4.1.2. Hilfssatz.** *$\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$ ist ein $\wedge$-Unterhalbverband von $V$.*

*Beweis:* $1_V$ respektiert alle $x \to y \in \mathfrak{I}$, denn es gilt immer $y \leq 1_V$.
Seien $A \subseteq \mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$ und $x \to y \in \mathfrak{I}$ beliebig. Dann folgt aus $x \leq \bigwedge A$ bereits $x \leq a$ für alle $a \in A$. Da all diese $a$ die Implikation $x \to y \in \mathfrak{I}$ respektieren, gilt auch $y \leq a$ für alle $a \in A$. Also ist $y \leq \bigwedge A$, d.h. $\bigwedge A$ respektiert $x \to y$. □

In Kapitel 1 (Satz 1.3.2) haben wir bereits gesehen, daß zu jedem $\wedge$-Unterhalbverband ein Hüllenenoperator existiert. Diesen bezeichnen wir mit:

$$\gamma_{\mathfrak{I}} := \gamma_{(\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}})} : V \to V, a \mapsto \bigwedge \{b \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{I}} | a \leq b\}$$

**4.1.3. Hilfssatz.** *Den Hüllenoperator $\gamma_{\mathfrak{I}} : V \to V$ können wir wie folgt berechnen. Wir setzen für $a \in V$:*

$$\begin{aligned} a^{\mathfrak{I}} &:= a \vee \bigvee\{y | x \to y \in \mathfrak{I} \, und \, x \leq a\}, \\ a^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}} &:= a^{\mathfrak{I}} \vee \bigvee\{y | x \to y \in \mathfrak{I} \, und \, x \leq a^{\mathfrak{I}}\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

*und definieren $\mathfrak{I}(a) = a^{\mathfrak{I} \cdots \mathfrak{I}}$ als das erste Element dieser Folge, für das gilt: $\mathfrak{I}(a) = \mathfrak{I}(a)^{\mathfrak{I}}$. Dann ist*

$$\gamma_{\mathfrak{I}}(a) = \mathfrak{I}(a).$$

*Beweis:*
1. Da $V$ endlich ist, muß die monoton wachsende Folge $(a^{\mathfrak{I}}, a^{\mathfrak{I}\mathfrak{I}}, \dots)$ stagnieren, es gibt also so ein $\mathfrak{I}(a)$.
2. Nach Konstruktion von $\mathfrak{I}(a)$ gilt: $\mathfrak{I}(a)$ respektiert alle Implikationen in $\mathfrak{I}$, d.h. $\mathfrak{I}(a) \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$.
3. Ist $b \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$ mit $a \leq b$, so gilt: $\mathfrak{I}(a) \leq b$ .
Angenommen, es ist $\mathfrak{I}(a) \not\leq b$. Dann gibt es ein $a_0 = a^{\mathfrak{I} \cdots \mathfrak{I}}$ mit $a_0 \leq b$ und $a_0^{\mathfrak{I}} \not\leq b$. Sei nun $\mathfrak{I}_0 := \{x \to y \in \mathfrak{I} | x \leq a_0\}$. Für alle $x \to y \in \mathfrak{I}_0$ gilt demnach $x \leq b$. Da $b$ alle Implikationen aus $\mathfrak{I}_0 \subseteq \mathfrak{I}$ respektiert, folgt $y \leq b$. Dann ist aber auch $a_0^{\mathfrak{I}} = a_0 \vee \bigvee\{y | x \to y \in \mathfrak{I}_0\} \leq b$, was ein Widerspruch zur Definition von $a_0$ ist. □

Wir können also jeder Menge $\mathfrak{I}$ von Implikationen in $V$ einen Hüllenoperator $\gamma_{\mathfrak{I}} : V \to V$ zuordnen. Eine naheliegende Frage ist nun, für welche Implikationenmengen die zugehörigen Hüllenoperatoren identisch sind. Hierzu betrachten wir den *Abschluß* einer Implikationenmenge:

**4.1.4. Definition.** Eine Implikation $x \to y$ in $V$ *folgt (semantisch)* aus $\mathfrak{I}$, falls jedes $a \in V$, welches alle Implikationen aus $\mathfrak{I}$ respektiert, auch $x \to y$ respektiert, d.h. falls gilt

$$\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}} \subseteq \mathfrak{H}_{\{x \to y\}}.$$

Der *Abschluß* $\mathfrak{I}^+$ von $\mathfrak{I}$ sei die Menge aller Implikationen, die aus $\mathfrak{I}$ folgen. $\mathfrak{I}$ heißt *abgeschlossen*, falls $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^+$ ist.

Der Abschluß $\mathfrak{I}^+$ ist eine Obermenge von $\mathfrak{I}$, denn jede Implikation $x \to y \in \mathfrak{I}$ folgt trivialerweise aus $\mathfrak{I}$. Nach Definition von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$ gilt damit $\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}} \supseteq \mathfrak{H}_{(\mathfrak{I}^+)}$, und weil alle Implikationen in $\mathfrak{I}^+$ aus $\mathfrak{I}$ folgen, gilt $\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{I}^+}$. Der Hüllenoperator zu $\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$ ist $\gamma_{\mathfrak{I}}$, also können wir folgern:

**4.1.5. Hilfssatz.** *Es gilt:*

$$\gamma_{\mathfrak{I}} = \gamma_{(\mathfrak{I}^+)}$$

Wir verwenden nun folgendes Ergebnis aus der Theorie der funktionalen Abhängigkeiten ([Laue]), um $\mathfrak{I}^+$ zu charakterisieren:

**4.1.6. Satz. (Armstrong-Axiome)***Sei $\mathfrak{I}$ eine Menge von Implikationen in einem endlichen Verband $V$. Dann gilt für alle $w, x, y, z \in V$:*

A1. $x \to x \in \mathfrak{I}^+$

A2. $x \to y \in \mathfrak{I}^+$ *und* $x \leq z \;\Rightarrow\; z \to y \in \mathfrak{I}^+$

A3. $x \to y \in \mathfrak{I}^+$ *und* $y \vee z \to w \in \mathfrak{I}^+ \;\Rightarrow\; x \vee z \to w \in \mathfrak{I}^+$

*Die 3 Axiome erzeugen $\mathfrak{I}^+$ vollständig, d.h. man kann jede Implikation, die aus $\mathfrak{I}$ folgt, durch sukzessives Anwenden der Regeln* (A1) – (A3) *herleiten.*

*Beweis:*
A1. $x \to x$ wird trivialerweise von allen $a \in V$ respektiert: $x \leq a \Rightarrow x \leq a$.
A2. Für alle $a \in V$, die $x \to y$ respektieren, folgt aus $z \leq a$ wegen $x \leq z$ bereits $x \leq a \Rightarrow y \leq a$, also respektiert $a$ auch $z \to y$.
A3. $a \in V$ respektiere sowohl $x \to y$ als auch $y \vee z \to w$. Aus $x \vee z \leq a$ folgt einerseits $x \leq a$ und aufgrund der ersten Implikation $y \leq a$. Andererseits folgt aus $x \vee z \leq a$ auch $z \leq a$, also insgesamt $y \vee z \leq a$. Weil $a$ auch die zweite Implikation respektiert, gilt also $w \leq a$. Wir haben $x \vee z \leq a \Rightarrow w \leq a$ gezeigt, und somit respektiert $a$ auch die Implikation $x \vee z \to w$.

Zum Beweis für die Vollständigkeit der Axiome benötigen wir noch mehr Theorie:

Sei $\mathfrak{I}^*$ die kleinste Obermenge von $\mathfrak{I}$, so daß durch Anwenden der Armstrong-Axiome (A1) – (A3) auf $\mathfrak{I}^*$ keine weiteren Implikationen erzeugt werden können. Wir bezeichnen $\mathfrak{I}^*$ auch als *Armstrong-Abschluß* von $\mathfrak{I}$.

Unser Ziel ist nun, zu zeigen, daß $\mathfrak{I}^* = \mathfrak{I}^+$ ist. Hierzu haben wir bereits die Inklusion $\mathfrak{I}^* \subseteq \mathfrak{I}^+$ gezeigt.

**4.1.7. Hilfssatz.** *Für $\mathfrak{I}^*$ gelten neben den Armstrong-Axiomen noch folgende weitere Regeln (für $x, y, z \in V$):*

A4. $x \to y \in \mathfrak{I}^*$ *und* $y \to z \in \mathfrak{I}^* \Rightarrow x \to z \in \mathfrak{I}^*$

A5. $x \to y \in \mathfrak{I}^*$ *und* $x \to z \in \mathfrak{I}^* \Rightarrow x \to y \vee z \in \mathfrak{I}^*$

A6. $x \to y \in \mathfrak{I}^*$ *und* $y \geq z \Rightarrow x \to z \in \mathfrak{I}^*$

*Beweis:*
A4. folgt aus (A3) mit $z = x \wedge y$.
A5. Aufgrund von (A1) gilt $y \vee z \to y \vee z \in \mathfrak{I}^*$. Mit (A3) folgt aus $x \to y$ und $y \vee z \to y \vee z$: $x \vee z \to y \vee z \in \mathfrak{I}^*$, und weiter aus $x \to z$ und $x \vee z \to y \vee z$: $x \vee x \to y \vee z \in \mathfrak{I}^*$.
A6. Wegen (A1) ist $z \to z \in \mathfrak{I}^*$ und wegen (A2) auch $y \to z \in \mathfrak{I}^*$. Aus $x \to y$ und $y \to z$ folgt aber mit (A4) : $x \to z \in \mathfrak{I}^*$. □

Definieren wir nun für $a \in V$ den *Armstrong-Abschluß*:

$$a^* := \bigvee \{b \in V | a \to b \in \mathfrak{I}^*\}$$

so können wir $\mathfrak{I}^*$ wie folgt charakterisieren:

**4.1.8. Hilfssatz.** *Für $x, y \in V$ gilt:*

$$x \to y \in \mathfrak{I}^* \Leftrightarrow y \leq x^*$$

*Beweis:* Die Richtung „$\Rightarrow$" gilt nach Definition von $x^*$ und die Rückrichtung folgt mit (A6) aus $x \to x^* \in \mathfrak{I}^*$. Letzteres erhält man durch sukzessives Anwenden von (A5) auf alle $x \to y \in \mathfrak{I}^*$. (Hierzu benötigen wir die Endlichkeit des Verbandes). □

Nun können wir den Beweis von Satz 4.1.6 fortführen:

*Beweis:* (der Vollständigkeit der Armstrong-Axiome (4.1.6))
Zu zeigen ist: $\mathfrak{I}^+ \subseteq \mathfrak{I}^*$. Sei $x \to y \notin \mathfrak{I}^*$, d.h. $x \to y$ kann nicht aus $\mathfrak{I}$ mit Hilfe der Armstrong-Axiome abgeleitet werden. Falls wir ein $a \in V$ finden, welches alle Implikationen aus $\mathfrak{I}$ respektiert, aber nicht $x \to y$, so ist $x \to y \notin \mathfrak{I}^+$, der Satz ist dann also bewiesen.
Wähle $a := x^*$: $x^*$ respektiert nicht $x \to y$, denn es gilt $x \leq x^*$ ($x \to x \in \mathfrak{I}^*$ wegen (A1) und 4.1.8). Aber es ist nicht $y \leq x^*$ (sonst wäre $x \to y \in \mathfrak{I}^*$ – wieder aufgrund von 4.1.8). Andererseits respektiert $x^*$ alle Implikationen aus $\mathfrak{I}$: Sei dazu $v \to w \in \mathfrak{I}$. Falls $v \not\leq x^*$ ist, so respektiert $x^*$ die Implikation $v \to w$ trivialerweise. Sei also $v \leq x^*$. Dann ist nach 4.1.8 $x \to v \in \mathfrak{I}^*$. Mit (A4) ist auch $x \to w \in \mathfrak{I}^*$, woraus wir wieder mit 4.1.8 folgern: $w \leq x^*$, d.h. $x^*$ respektiert $v \to w$. □

Damit ist 4.1.6 bewiesen, es ist also $\mathfrak{I}^+ = \mathfrak{I}^*$. Wir verwenden ab jetzt nur noch die Bezeichnung $\mathfrak{I}^+$ für den Abschluß einer Implikationenmenge. Auch der Armstrong-Abschluß $a^*$, den wir für den Beweis benötigt haben, ist nun hinfällig, denn es gilt:

**4.1.9. Hilfssatz.** *Für jedes $a \in V$ gilt:*

$$\gamma_{\mathfrak{I}}(a) = a^*$$

*Beweis:* Nach 4.1.5 ist $\gamma_{\mathfrak{I}}(a) = \gamma_{(\mathfrak{I}^+)}(a)$, und $\gamma_{(\mathfrak{I}^+)}$ bildet nach Definition $a$ auf das kleinste $\bar{a} \in V$ mit $a \leq \bar{a}$ ab, welches alle Implikationen in $\mathfrak{I}^+$ respektiert. Wegen $a \to a^* \in \mathfrak{I}^+$gilt demnach: $\gamma_{\mathfrak{I}}(a) \geq a^*$. Wir müssen also lediglich zeigen, daß $a^*$ alle Implikationen in $\mathfrak{I}^+$ respektiert. Dies ist aber der Fall, denn gäbe es eine Implikation $x \to y \in \mathfrak{I}^+$ mit $x \leq a^*$ und $y \not\leq a^*$, so wäre mit (A2) auch $a^* \to y \in \mathfrak{I}^+$ und mit (A4) und $a \to a^* \in \mathfrak{I}^+$ würde folgen: $a \to y \in \mathfrak{I}^+$. Dann stände aber $y \not\leq a^*$ im Widerspruch zur Definition von $a^*$. □

**4.1.10. Folgerung.**

$$\mathfrak{I}^+ = \{x \to y | x \in V, y \leq \gamma_{\mathfrak{I}}(x)\}$$

Wir haben bisher jeder Implikationenmenge einen Hüllenoperator zugeordnet. Definieren wir nun umgekehrt für jeden Hüllenoperator $\gamma : V \to V$ die Menge

$$\mathfrak{I}_\gamma := \{x \to y | x \in V, y \leq \gamma(x)\},$$

so gilt:

**4.1.11. Hilfssatz.**

1. $\mathfrak{I}^+ = \mathfrak{I}_{(\gamma_{\mathfrak{I}})}$.
2. *Für jeden Hüllenoperator* $\gamma\colon V \to V$ *gilt:* $\gamma = \gamma_{(\mathfrak{I}_\gamma)}$.
3. $\mathfrak{I}_\gamma$ *ist für jeden Hüllenoperator* $\gamma$ *abgeschlossen.*

*Beweis:*
1. Dies folgt aus 4.1.10 und der Definition von $\mathfrak{I}_\gamma$:

$$\mathfrak{I}^+ = \{x \to y | x \in V, y \leq \gamma_{\mathfrak{I}}(x)\} = \mathfrak{I}_{(\gamma_{\mathfrak{I}})}$$

2. Betrachte $\gamma_{(\mathfrak{I}_\gamma)}(a)$ für ein $a \in V$. Nach Definition ist $\gamma_{(\mathfrak{I}_\gamma)}(a)$ das kleinste $\bar{a} \in V$ mit $a \leq \bar{a}$, welches alle Implikationen in $\mathfrak{I}_\gamma$ respektiert. Da nun $a \to \gamma(a) \in \mathfrak{I}_\gamma$ (und $a \leq \gamma_{(\mathfrak{I}_\gamma)}(a)$) ist, gilt: $\gamma(a) \leq \gamma_{\mathfrak{I}_\gamma}(a)$. Ähnlich wie im Beweis zu 4.1.9 genügt es also zu zeigen, daß $\gamma(a)$ alle Implikationen in $\mathfrak{I}_\gamma$ respektiert: Sei $x \to y \in \mathfrak{I}_\gamma$ beliebig mit $x \leq \gamma(a)$. Da $\gamma$ monoton wachsend und idempotent ist, folgt $y \leq \gamma(x) \leq \gamma(\gamma(a)) \leq \gamma(a)$, also respektiert $\gamma(a)$ die Implikation.
3. $\mathfrak{I}_\gamma$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\mathfrak{I}_\gamma = (\mathfrak{I}_\gamma)^+$ ist. Dies gilt aber nach (1) und (2):

$$(\mathfrak{I}_\gamma)^+ = \mathfrak{I}_{(\gamma_{(\mathfrak{I}_\gamma)})} = \mathfrak{I}_\gamma \qquad \square$$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammen:

**4.1.12. Satz. (Hauptsatz für Implikationen)** *Sei* $V$ *endlicher Verband. Die abgeschlossenen Implikationenmengen in* $V$ *sind dann genau die Hüllenoperatoren auf* $V$. *Das heißt:*

1. *Zu jedem Hüllenoperator* $\gamma : V \to V$ *existiert eine abgeschlossene Implikationenmenge* $\mathfrak{I}_\gamma$*:*
$$\mathfrak{I}_\gamma := \{x \to y | y \leq \gamma(x)\}$$
2. *Zu jeder Implikationenmenge* $\mathfrak{I}$ *in* $V$ *kann man einen Hüllenoperator* $\gamma_{\mathfrak{I}}$ *angeben:*
$$\gamma_{\mathfrak{I}}\colon V \to V, a \mapsto \mathfrak{I}(a)$$

3. *Ist $\mathfrak{I}$ abgeschlossen, so sind die angegebenen Operatoren zueinander invers, d.h.*

$$\gamma = \gamma_{(\mathfrak{I}_\gamma)}$$
$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{(\gamma_\mathfrak{I})}$$

*Beweis:* Der Hüllenoperator $\gamma_\mathfrak{I}$ ist nach 4.1.3 wie angegeben. Die restlichen Aussagen wurden in 4.1.11 gezeigt. □

Wir können nun zu jedem Hüllenoperator eine äquivalente Implikationenmenge $\mathfrak{I}_\gamma$ angeben. Leider enthält $\mathfrak{I}_\gamma$ sehr viele Implikationen, obwohl die meisten zur Beschreibung von $\gamma$ gar nicht notwendig sind. Wir suchen also zu gegebenem Hüllenoperator $\gamma$ nach möglichst kleinen Teilmengen $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}_\gamma$, sodaß $\gamma_\mathfrak{I} = \gamma$ gilt.

**4.1.13. Definition.** Eine Implikationenmenge $\mathfrak{I}$ heißt *nichtredundant,* wenn keine der Implikationen aus den anderen folgt, d.h. falls gilt:

$$\nexists\, \mathfrak{I}_0 \subsetneq \mathfrak{I} : \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}_0^+.$$

Sei weiter $\gamma$ Hüllenoperator. Dann heißt $\mathfrak{I}$ *vollständig* oder *Erzeugendensystem* von $\gamma$, falls gilt

$$\mathfrak{I}^+ = \mathfrak{I}_\gamma.$$

Ein nichtredundantes Erzeugendensystem von $\gamma$ nennen wir *Basis* von $\gamma$.

Wir geben nun eine natürliche und eindeutig bestimmte Basis zu jedem Hüllenoperator $\gamma : V \to V$ an. Hierbei orientieren wir uns an einer Arbeit von Guigues und Duquenne [GuDu86]. Dort wurde laut [GaWi96] für den Spezialfall des klassischen Kontextes (als Hüllenoperator dient hier die zweite Ableitung von Merkmalsmengen) mit Hilfe sogenannter *Pseudoinhalte* eine solche Basis eingeführt. Da der Name Pseudoinhalt in Anlehnung an Begriffsinhalte gewählt wurde, ist es wohl sinnvoller, die entsprechende Verallgemeinerung hier *Pseudohülle* zu nennen. Diese sind rekursiv definiert:

**4.1.14. Definition.** Sei $\gamma : V \to V$ Hüllenoperator. Ein $p \in V$ heißt *Pseudohülle* von $\gamma$, falls $\gamma(p) \neq p$ ist, und falls für jede Pseudohülle $q < p$ auch $\gamma(q) \leq p$ gilt.

**4.1.15. Satz.** *Ist $\gamma : V \to V$ Hüllenoperator, so ist die Implikationenmenge*

$$\mathfrak{I} := \{p \to \gamma(p) | p \textit{ Pseudohülle von } \gamma\}$$

*nichtredundant und vollständig. Sie heißt Duquenne-Guigues-Basis von $\gamma$.*

*Beweis:* Es gilt $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{I}_\gamma$ nach Definition von $\mathfrak{I}_\gamma$, also ist auch $\mathfrak{I}^+ \subseteq \mathfrak{I}_\gamma^+ = \mathfrak{I}_\gamma$. Um $\mathfrak{I}_\gamma \subseteq \mathfrak{I}^+$ zu verifizieren, genügt es zu zeigen, daß jedes $a \in V$, welches $\mathfrak{I}$ respektiert, eine Hülle zu $\gamma$ ist, daß also $a = \gamma(a)$ gilt. Sei also $a \in \mathfrak{H}_\mathfrak{I}$. Dann respektiert $a$ insbesondere alle Implikationen $p \to \gamma(p)$, wobei $p$ Pseudohülle ist.

Das heißt, für alle Pseudohüllen $p$ mit $p < a$ gilt: $\gamma(p) \leq a$. Angenommen, es ist $\gamma(a) \neq a$. Dann ist $a$ selbst Pseudohülle, $a \to \gamma(a)$ ist also in $\mathfrak{I}$ enthalten. Da aber $a$ die Implikation $a \to \gamma(a)$ nicht respektiert, führt dies zu einem Widerspruch. Also muß $a = \gamma(a)$ gelten, das heißt, $a$ ist Hülle.
Wir müssen noch die Nichtredundanz von $\mathfrak{I}$ zeigen: Jede beliebige Pseudohülle $p \in V$ respektiert $\mathfrak{I} \setminus \{p \to \gamma(p)\}$, denn für jede weitere Pseudohülle $q$ mit $q < p$ ist auch $\gamma(q) \leq p$. Andererseits respektiert $p$ nicht die Implikation $p \to \gamma(p)$, also ist $\mathfrak{I} \not\subseteq (\mathfrak{I} \setminus \{p \to \gamma(p)\})^+$. □

In der Datenbanktheorie werden noch folgende weitere Eigenschaften von Implikationenmengen betrachtet:

1. Eine Basis $\mathfrak{I}$ von $\gamma$ heißt *minimal*, falls es keine weitere Basis $\mathfrak{I}_0$ gibt, die mit echt weniger Implikationen auskommt.

2. Eine Basis $\mathfrak{I}$ heißt *linksreduziert*, falls alle Implikationen $x \to y \in \mathfrak{I}$ linksreduziert sind. Letzteres ist der Fall, falls es kein $x_0 < x$ gibt, sodaß die Implikationenmenge $(\mathfrak{I} \setminus \{x \to y\}) \cup \{x_0 \to y\}$ ein Erzeugendensystem von $\gamma$ ist.

3. Eine Basis $\mathfrak{I}$ heißt *rechtsreduziert*, falls alle Implikationen $x \to y \in \mathfrak{I}$ rechtsreduziert sind, das heißt, falls es kein $y_0 < y$ gibt, sodaß $(\mathfrak{I} \setminus \{x \to y\}) \cup \{x \to y_0\}$ Erzeugendensystem von $\gamma$ ist.

Für eine weiterführende Arbeit wäre es interessant, zu untersuchen, inwieweit diese Eigenschaften von der Duquenne-Guigues Basis erfüllt sind. Die Minimalität müßte man ohne größere Schwierigkeiten beweisen können, falls es möglich ist, die entsprechenden Sätze, welche in [Laue] für funktionale Abhängigkeiten bewiesen wurden, zu verallgemeinern. Allerdings ist die Duquenne-Guigues-Basis weder links- noch rechtsreduziert, und diese Eigenschaften würde man nur auf Kosten der Eindeutigkeit erzeugen können. In einem distributiven Verband $V$ (d.h. Supremum und Infimum verhalten sich zueinander distributiv: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ und $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$) könnte man zwar mit Hilfe von

$$x^\circ := \bigwedge \{y | x \vee y = \gamma(x)\}$$

anstatt $p \to \gamma(p)$ die Implikationen $p \to p^\circ$ als Implikationenbasis verwenden. Aber auch diese Basis ist im Allgemeinen nicht rechtsreduziert.

Weiterhin wäre es sinnvoll – in Anlehnung an die ringförmigen Abhängigkeiten (siehe [Laue]) – *ringförmige Implikationen* $(x_1, \ldots, x_n) \to y$ einzuführen, weil dadurch eine übersichtlichere Darstellung der Duquenne-Guigues-Basis möglich wäre. (Eine ringförmige Implikation $(x_1, \ldots, x_n) \to y$ steht für die Implikationen $x_i \to x_j$ und $x_i \to y$ mit $1 \leq i, j \leq n$.) Die Duquenne-Guigues-Basis enthält höchstens so viele ringförmige Implikationen, wie es Hüllen gibt.

## 4.2 Implikationen im Kontext

Wir wenden nun die bisherigen allgemeinen Ergebnisse auf die formale Begriffsanalyse an, d.h. wir untersuchen Implikationen im endlichen Verbandskontext $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$. Hierzu definieren wir zunächst:

**4.2.1. Definition.** Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein endlicher Verbandskontext, und seien $y_1, y_2 \in Y$. Eine Implikation $y_1 \to y_2$ *gilt* in $\mathbb{K}$, falls für alle $x \in X$ gilt: Die Ableitung $x'$ respektiert die $y_1 \to y_2$.
Die Menge aller Implikationen, die im Kontext gelten, bezeichnen wir mit $\mathfrak{I}(\mathbb{K})$.

**4.2.2. Satz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ ein endlicher Verbandskontext und $y_1 \to y_2$ eine Implikation in $Y$. Es sind äquivalent:*

1. *$y_1 \to y_2$ gilt in $\mathbb{K}$.*
2. *$y_2 \leq y_1''$.*
3. *Alle Begriffsinhalte von $\mathbb{K}$ respektieren $y_1 \to y_2$.*

*Beweis:*
„1 $\Rightarrow$ 2“. $y_1 \to y_2$ gilt in $\mathbb{K}$, falls alle Ableitungen $x'$ mit $x \in X$ die Implikation respektieren, insbesondere $x := y_1'$. Aus $y_1 \leq y_1''$ folgt demnach: $y_2 \leq y_1''$.
„2 $\Rightarrow$ 3“. Sei $x' \in \varphi(X)$ beliebiger Begriffsinhalt. Falls $y_1 \leq x'$ ist, so ist auch $y_2 \leq y_1'' \leq x''' = x'$. Also respektiert $x'$ die Implikation $y_1 \to y_2$.
„3 $\Rightarrow$ 1“. Die Ableitungen $x'$, $x \in X$ sind genau die Begriffsinhalte. □

Mit der Definition von $\mathfrak{I}_\gamma$ (siehe Seite 90) folgt aus 4.2.2:

**4.2.3. Folgerung.** Bezeichnen wir mit $\gamma := \varphi \circ \varphi^d$ die zweite Ableitung in $Y$, so ist $\mathfrak{I}(\mathbb{K}) = \mathfrak{I}_\gamma$

*Beweis:* $\mathfrak{I}_\gamma = \{y_1 \to y_2 | y_1 \in Y, y_2 \leq y_1''\} = \mathfrak{I}(\mathbb{K})$. □

Wir wissen aus Kapitel 2, daß es zu jedem Verbandskontext $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ einen inzidenzisomorphen klassischen Kontext $\mathbb{K}_*$ gibt. Man erhält so einen klassischen Kontext, indem man $\vee$-dichte Teilmengen $G \subseteq X$, $M \subseteq Y$ wählt und $I := \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ setzt. Die Frage ist nun, welcher Zusammenhang zwischen den Implikationen in $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_*$ besteht.

**4.2.4. Hilfssatz.** *Sei $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ Verbandskontext, und seien $G \subseteq X$, $M \subseteq Y$ $\vee$-dicht. Sei weiter $\mathbb{K}_* = (G, M, I)$ mit $I := \mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ der zugehörige klassische Kontext. Dann gilt für die Abbildungen*

$$\iota : Y \to \mathfrak{P}(M), y \mapsto \{m \in M | m \leq y\}$$
$$\pi : \mathfrak{P}(M) \to Y, A \mapsto \bigvee A$$

*mit $y, y_1, y_2 \in Y$ und $B, B_1, B_2 \subseteq \mathfrak{P}(M)$:*

*1. $\iota$ und $\pi$ sind monoton. Es gilt sogar:*

$$y_1 \leq y_2 \;\Leftrightarrow\; \iota(y_1) \subseteq \iota(y_2)$$
$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \pi(B_1) \leq \pi(B_2)$$

*2. $\iota$ ist $\wedge$-erhaltend und $\pi$ ist $\vee$-erhaltend:*

$$\iota(y_1 \wedge y_2) = \iota(y_1) \cap \iota(y_2)$$
$$\pi(B_1 \cup B_2) = \pi(B_1) \vee \pi(B_2)$$

*3. Für $\pi \circ \iota$ und $\iota \circ \pi$ gilt:*

$$y = \pi(\iota(y)$$
$$B \subseteq \iota(\pi(B))$$

*4. $\iota$ und $\pi$ sind vertauschbar mit der zweiten Ableitung in $\mathbb{K}$ bzw. $\mathbb{K}_*$:*

$$\iota(y'') = \iota(y)''$$
$$\pi(B'') = \pi(B)''$$

*Aus den Punkten (1) – (3) folgt insbesondere, daß $\iota$ residuierte Abbildung und $\pi$ zugehörige residuale Abbildung ist.*

*Beweis:*
1.–3. folgen aus der Definition von $\iota$ und $\pi$, sowie der $\vee$-Dichtheit von $M$ in $V$.
4. $\mathbb{K}_*$ kann man als Potenzmengenkontext $(\mathfrak{P}(G), \mathfrak{P}(M), \varphi_*)$ auffassen, wobei $\varphi_* := \mathrm{GA}_{\mathfrak{P}(G),\mathfrak{P}(M)}(I)$ die Galoisabbildung zu $I$ ist. Dann sind $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_*$ inzidenzisomorph. Der zugehörige Inzidenzisomorphismus ist $\gamma = (\gamma_X, \gamma_Y)$, mit

$$\gamma_X : G \to I^{\vee}(\mathfrak{P}(G)), g \mapsto \{g\} \quad \text{und}$$
$$\gamma_Y : M \to I^{\vee}(\mathfrak{P}(M)), m \mapsto \{m\}.$$

Durch diesen Inzidenzisomorphismus erhalten wir weiter einen Begriffsisomorphismus $\mu = (\mu_X, \mu_Y) \colon X \times Y \to \mathfrak{P}(G) \times \mathfrak{P}(M)$, wobei für $y \in Y$ gilt:

$$\mu_Y(y) = \bigvee \{\gamma_Y(m) | m \leq y\} = \{m | m \leq y\} = \iota(y).$$

Also ist $\iota$ Teil eines Begriffsisomorphismus, d.h. insbesondere verträglich mit der zweiten Ableitung (vgl. Satz 2.4.6):

$$\iota(y'') = \mu_X(y')' = \iota(y)''$$

Die Verträglichkeit von $\pi$ mit der zweiten Ableitung folgt analog aus dem Begriffsisomorphismus $\nu = (\nu_X, \nu_Y) \colon \mathfrak{P}(G) \times \mathfrak{P}(M) \to X \times Y$, mit

$$\nu_Y(A) = \bigvee \{\gamma_Y^{-1}(\{m\}) | \{m\} \subseteq A\} = \bigvee \{m | m \in A\} = \pi(A). \qquad \square$$

Nun können wir den Zusammenhang der Implikationen in $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}_*$ betrachten:

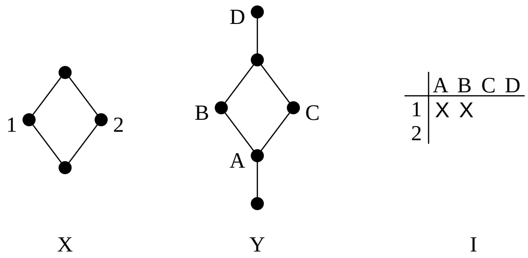



Abbildung 4.1: Ein Verbandskontext

**4.2.5. Satz.** *Die Voraussetzungen seien wie in 4.2.4. Dann besteht zwischen der Menge $\mathfrak{I}(\mathbb{K})$ aller Implikationen in $\mathbb{K}$, und den Implikationen im klassischen Kontext $\mathbb{K}_*$ folgender Zusammenhang:*

1. *Für $y_1, y_2 \in Y$ gilt $y_1 \to y_2$ genau dann in $\mathbb{K}$, wenn $\iota(y_1) \to \iota(y_2)$ in $\mathbb{K}_*$ gilt.*
2. *Sei $A_1, A_2 \subseteq M$. Falls $A_1 \to A_2$ in $\mathbb{K}_*$ gilt, so gilt auch $\pi(A_1) \to \pi(A_2)$ in $\mathbb{K}$.*

*Beweis:* Dies folgt aus 4.2.4, zusammen mit 4.2.2:
1. $y_1 \to y_2$ gilt in $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ $y_2 \leq y_1''$ $\Leftrightarrow$ $\iota(y_2) \leq \iota(y_1'') = \iota(y_1)''$ $\Leftrightarrow$ $\iota(y_1) \to \iota(y_2)$ gilt in $\mathbb{K}_*$
2. Die Implikation $A_1 \to A_2$ gilt genau dann in $\mathbb{K}_*$, wenn $A_2 \subseteq A_1''$ ist. Daraus folgt $\pi(A_2) \leq \pi(A_1'') = \pi(A_1)''$, was bedeutet, daß $\pi(A_1) \to \pi(A_2)$ in $\mathbb{K}$ gilt. ☐

Betrachten wir die Duquenne-Guigues-Basis von $\mathfrak{I}(\mathbb{K})$. In der Begriffsanalyse werden die Pseudohüllen üblicherweise Pseudoinhalte genannt, in Anlehnung an die Begriffsinhalte, welche ja die Hüllen des Hüllenoperators darstellen.

Es stellt sich die Frage, ob man die Duquenne-Guigues-Basis eines Verbandskontextes aus der entsprechenden Basis des zugehörigen klassischen Kontextes gewinnen kann. Hierzu habe ich aber kein geeignetes Verfahren gefunden. Es ist insbesondere für einen Pseudoinhalt $P \subseteq M$ von $\mathbb{K}_*$ nicht immer auch $\pi(P)$ ein Pseudoinhalt, und es gibt auch nicht unbedingt für jeden Pseudoinhalt $p \in Y$ von $\mathbb{K}$ einen Pseudoinhalt $P$ in $\mathbb{K}_*$, sodaß $\pi(P) = p$ ist:

**4.2.6. Beispiel.** Betrachte den Verbandskontext $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$, aus Abb. 4.1: Die Verbandsstrukturen von $X$ und $Y$ sind wie angegeben, und $\varphi$ ist über die $\vee$-dichten Teilmengen $G = \{1, 2\} \subseteq X$ und $M = \{A, B, C, D\} \subseteq Y$ durch die Inzidenzrelation $I$ definiert, d.h. $\varphi := \mathrm{GA}_{X,Y}(I)$. Der klassische Kontext $\mathbb{K}_* = (G, M, I)$ ist dann inzidenzisomorph zu $\mathbb{K}$.
Begriffsinhalte im klassischen Kontext $\mathbb{K}_*$ sind $\emptyset$, $\{A, B\}$ und $\{A, B, C, D\}$, Pseudoinhalte sind $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$, und $\{D\}$. Also besteht die Duquenne-Guigues-Basis von $\mathbb{K}_*$ aus folgenden Elementen:

$$\mathfrak{I} = \Big\{\{A\} \to \{A, B\}, \{B\} \to \{A, B\}, \{C\} \to \{A, B, C, D\}, \{D\} \to \{A, B, C, D\}\Big\}$$

Wie wir im Beweis von Satz 4.2.4 gesehen haben, ist $\pi$ Teil des Begriffsisomorphismus $\nu = (\nu_X, \pi)$, also Isomorphismus zwischen den Begriffsinhalten von $\mathbb{K}_*$ und

$\mathbb{K}$. Wir kennen demnach die Begriffsinhalte in $\mathbb{K}$: $0_Y = \pi(\emptyset)$, $B = \pi(\{A, B\})$ und $D = \pi(\{A, B, C, D\})$. Die Pseudoinhalte in $\mathbb{K}$ bestimmen wir mit Hand nach der Definition: $A$ ($A'' = B$) und $B \vee C$ ($(B \vee C)'' = D$) sind die einzigen Pseudoinhalte in $\mathbb{K}_*$. Wie wir sehen können, bildet $\pi$ leider keinen nutzbaren Zusammenhang zwischen den Pseudoinhalten von $\mathbb{K}_*$ und $\mathbb{K}$: Zwar ist $A = \pi(\{A\})$, es gibt allerdings keinen Pseudoinhalt $P$ in $\mathbb{K}_*$ mit $\pi(P) = B \vee C$. Weiter sind zumindest $\pi(\{B\}) = B$ und $\pi(\{D\}) = D$ Begriffsinhalte, während $\pi(\{C\}) = C$ weder Begriffsinhalt ($C'' = D$), noch Pseudoinhalt ist. (Pseudoinhalt $A$ ist kleiner als $C$, aber $A'' = B \nleq C$.)

Wir können also nicht ohne weiteres die bereits vorhandenen Algorithmen für klassische Kontexte verwenden, um die Duquenne-Guigues-Basis eines Verbandskontextes $\mathbb{K}$ zu bestimmen. Also formulieren wir die Algorithmen neu. Hierbei betrachten wir allerdings wieder den allgemeinen Fall von Hüllenoperatoren in endlichen Verbänden.

## 4.3 Algorithmen zur Darstellung von Hüllenoperatoren

Wie wir bereits am Anfang des Kapitels erwähnt haben, bieten sich Implikationen an, um einen Hüllenoperator $\gamma : V \to V$ in einem endlichen Verband darzustellen. Die nötigen mathematischen Grundlagen hierzu haben wir bereits gezeigt. Nun widmen wir uns den eher praktischen Problemen, die sich bei einer Anwendung dieser Idee stellen. Dies ist zum einen die Frage, wie man zu einem gegebenen Hüllenoperator die Pseudoinhalte – und damit die Duquenne-Guigues-Basis – erhält, und zum anderen die Notwendigkeit eines effizienten Algorithmus, um anschließend mit $\mathfrak{I}(a)$ für $a \in V$ Werte des Hüllenoperators ausrechnen zu können.

In diesem Abschnitt sei $V$ stets ein endlicher Verband, $\mathfrak{I}$ eine Implikationenmenge in $V$ und $\gamma \colon V \to V$ ein Hüllenoperator.

### 4.3.1 Der Algorithmus von Linclosure

Um die erste Frage zu beantworten, werden wir den Algorithmus zur Berechnung von $\mathfrak{I}(a)$ in leichter Variation mit verwenden, also betrachten wir zunächst dieses Problem. Ein erster Ansatz wird bereits durch 4.1.3 gegeben:

```
begin
  b := a;
  repeat
    c := b;
    for each x → y ∈ 𝔍 do
      if x ≤ b then b := b ∨ y; fi
    od
  until c = b;
  return b;
end.
```

Um die Effizienz von Algorithmen zu betrachten, gehen wir davon aus, daß Verbandsoperationen – der Vergleich zweier Elemente in $V$, die Zuweisung eines Wertes an eine Variable, sowie die Berechnung des Supremums bzw. Infimums zweier Elemente – jeweils mit Aufwand $O(c_V)$ möglich ist. In einer Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist beispielsweise $c_{\mathfrak{P}(M)} = |M|$.

Mit dieser Hilfsbezeichnung können wir den Aufwand des obigen Algorithmus angeben: Mit der inneren `for`-Schleife werden $O(|\mathfrak{J}|)$ Verbandsoperationen durchgeführt, und die äußere `repeat`-Schleife wird im ungünstigsten Fall $|\mathfrak{J}|$ mal durchlaufen. Also ist der Aufwand des Algorithmus insgesamt

$$O(|\mathfrak{J}|^2 * c_V).$$

Das ist keineswegs optimal. In diesem Algorithmus wird für jede Implikation mehrmals geprüft, ob $x \leq b$ gilt. In der Datenbanktheorie wurde hierfür der effizientere LINCLOSURE Algorithmus entwickelt (siehe [Laue]), welcher allerdings speziell auf Potenzmengen zugeschnitten ist.

Wie wir bereits in Kapitel 2 gesehen haben, kann man jedoch jeden vollständigen Verband in eine Potenzmenge einbetten. Hierzu benötigen wir eine $\vee$-dichte Teilmenge $M$ von $V$. Mit Hilfe folgender Abbildungen können wir dann – wie wir bereits in 4.2.4 gesehen haben – eine enge Beziehung zwischen $\mathfrak{P}(M)$ und $V$ beschreiben:

$$\iota : V \to \mathfrak{P}(M), v \mapsto \{m \in M | m \leq v\} \quad \text{und}$$
$$\pi : \mathfrak{P}(M) \to V, A \mapsto \bigvee A$$

Es gelten nämlich die Punkte (1) – (3) aus 4.2.4 (Für diese Aussagen ist kein Kontext notwendig, sie gelten also allgemein für endliche Verbände $V$.)

Bei Aufwandsbetrachtungen gehen wir davon aus, daß $|M| \leq O(c_V)$ ist, was durch geignete Wahl von $M \subseteq V$ möglich sein müßte. Durch diese Annahme können wir Operationen auf Teilmengen von $M$ wie Verbandsoperationen betrachten. Weiter nehmen wir für die beiden Abbildungen $\iota$ und $\pi$ an, daß die Auswertung an einer Stelle jeweils mit $O(c_V)$ Operationen möglich ist.

Mit Hilfe der Korrespondenz zwischen $V$ und $\mathfrak{P}(M)$ formulieren wir jetzt den Algorithmus LINCLOSURE zur Berechnung der Werte von $\gamma_{\mathfrak{I}}$. Hierzu sind aber Zusatzinformationen für die Implikationenmenge $\mathfrak{I}$ notwendig: Wir speichern für jedes $m \in M$ in der Liste $impl(m)$ Zeiger auf alle Implikationen $x \to y \in \mathfrak{I}$ mit $m \leq x$.

**4.3.1. Algorithmus.** (LINCLOSURE) Sei $M \subseteq V$ eine $\vee$-dichte Teilmenge, und sei für jedes $m \in M$ die globale Variable $impl(m) := \{x \to y \in \mathfrak{I} | m \leq x\}$ gegeben. Dann berechnet der Algorithmus für ein $a \in V$ den Wert $\mathfrak{I}(a)$ des Hüllenoperators $\gamma_{\mathfrak{I}}$.

```
begin
  b := a;
  for each x→y ∈ ℑ do
    count(x→y) := |ι(x)|;
    if |ι(x)| = 0 then b := b ∨ y; fi
  od
  update := ι(b); finished := ι(b);

  while update ≠ ∅ do
    choose m ∈ update; update := update − m;
    for each x→y ∈ impl(m) do
      count(x→y) := count(x→y) − 1;
      if count(x→y) = 0 then
        b := b ∨ y;
        add := ι(b) − finished;
        finished := finished ∪ add;
        update := update ∪ add;
      fi
    od
  od
  return b;
end.
```

**4.3.2. Bemerkung.**

1. Der Algorithmus 4.3.1 ist korrekt, d.h. er gibt $\mathfrak{I}(a)$ aus.
2. Der Aufwand von 4.3.1 beträgt

$$O(|\mathfrak{I}| * c_V)$$

*Beweis:*
1. Während des Algorithmus werden Operationen $b := b \vee y$ genau dann durchgeführt, wenn für eine Implikation $x \to y \in \mathfrak{I}$ gilt: Alle $m \in M$ mit $m \leq x$

sind auch kleiner oder gleich $b$. Dies ist aber äquivalent zu $x \leq b$. Also gilt nach Ablauf des Algorithmus für alle Implikationen $x \to y$ mit $x \leq b$ auch $y \leq b$, d.h. $b$ respektiert alle Implikationen. Andererseits wurde $b$ am Anfang auf $a$ gesetzt, und nur um die wirklich nötigen $y$ mit $x \to y \in \mathfrak{I}$ erweitert, also ist $b$ auch das kleinste Element in $V$, welches größer oder gleich $a$ ist und alle Implikationen in $\mathfrak{I}$ respekiert.
2. Die Initialisierung der Variablen $count(x \to y)$ wird mit Aufwand $O(|\mathfrak{I}| * c_V)$ erledigt. Die `while`-Schleife wird höchstens $|M|$ mal durchlaufen, in jedem Durchlauf wird die innere `for each`-Schleife höchstens $|\mathfrak{I}|$ mal ausgeführt, also werden Variablen $count(x \to y)$ höchstens $O(|\mathfrak{I}| * |M|)$ mal dekrementiert und auf Null getestet. Für jede Implikation kann weiter die innerste `if`-Anweisung höchstens einmal ausgeführt werden und der Aufwand dieser Anweisung beträgt $O(c_V)$. Gehen wir davon aus, daß $|M| \leq O(c_V)$ ist, so ist also der Gesamtaufwand des Algorithmus $O(|\mathfrak{I}| * c_V)$. □

Ist die Anzahl der Hüllen voraussichtlich wesentlich kleiner als die der Pseudohüllen, so kann man den Algorithmus LINCLOSURE an diese Situation anpassen: Die rechten Seiten aller Implikationen der Duquenne-Guigues Basis $\mathfrak{I}$ sind nämlich Hüllen. Hat man nun im Algorithmus eine Implikation $x_0 \to y_0$ auf $b$ angewendet, so kann man $count(x \to y_0) := 0$ setzen, für alle Implikationen mit der rechten Seite $y_0$. Dadurch wird die innere `if`-Anweisung höchstens einmal für jede Hülle aufgerufen.

### 4.3.2 Berechnung aller Hüllen

Bevor wir nun das Problem der Berechnung aller Pseudohüllen betrachten, geben wir einen Algorithmus HÜLLEN an, welcher alle Hüllen eines Hüllenoperators berechnet. Unser eigentliches Problem können wir dann durch kleine Abänderungen im Algorithmus lösen.

Sowohl der Algorithmus HÜLLEN als auch die Variation DUQUENNE-GUIGUES, welche schließlich die Duquenne-Guigues-Basis erzeugt, wurden in [GaWi96] für Hüllenoperatoren in Potenzmengen besprochen: Sie benötigen eine vollständige Ordnung auf dem Verband, wofür man im Falle einer Potenzmenge die lektische Ordnung nimmt:

**4.3.3. Definition.** Sei $M$ Menge mit $n$ Elementen, vollständig geordnet mittels $\leq$. Wir nehmen ohne Einschränkung $M = \{1, \ldots, n\}$ und definieren für zwei Mengen $A, B \subseteq M$ und für $i \in M$

$$A <_i B :\Leftrightarrow A \cap \{1, \ldots, i-1\} = B \cap \{1, \ldots, i-1\} \,\text{und}\, i \in B \setminus A.$$

Weiter definieren wir die *lektische Ordnung* auf $M$:

$$A < B :\Leftrightarrow \exists i \in M : A <_i B$$

Durch $<$ ist eine vollständige Ordnung auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert, und es gilt:

$$A \subsetneq B \Rightarrow A < B.$$

Setzen wir für $A \subseteq M$ und $i \in M$:[1]

$$A \oplus i := (A \cap \{1, \ldots, i-1\}) \cup \{i\}$$

so erhalten wir:

**4.3.4. Satz.** *Ohne Einschränkung sei $M = \{1, \ldots, n\}$ endliche Menge und sei $\gamma : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$ Hüllenoperator auf $\mathfrak{P}(M)$. Für $A \subseteq M$ ist die bezüglich der lektischen Ordnung kleinste Hülle, welche echt größer als $A$ ist, gleich*

$$\gamma(A \oplus i),$$

*wobei $i$ das größte Element von $M$ ist mit $A <_i \gamma(A \oplus i)$.*

*Beweis:* siehe [GaWi96], Satz 5 auf Seite 67. Wir beweisen weiter unten den allgemeineren Fall für endliche Verbände. □

Wie können wir nun die lektische Ordnung auf endliche Verbände erweitern? Nun, wir verwenden wieder eine $\vee$-dichte Teilmenge $M \subseteq V$ und die beiden Abbildungen $\iota$ und $\pi$. Satz 4.3.4 benötigt eine vollständige Ordnung auf $M$. Da wir $<$ bereits für die Ordnung des Verbandes verwenden, bezeichnen wir die vollständige Ordnung auf $M$ mit $\prec$.

**4.3.5. Definition.** Sei $V$ endlicher Verband und $M \subseteq V$ $\vee$-dicht. Weiter sei $\prec$ eine vollständige Ordnung auf $M$. Für $a, b \in V$ und $i \in M$ ist dann:

$$\begin{aligned} a \prec_i b &:\Leftrightarrow \iota(a) \prec_i \iota(b) \\ a \prec b &:\Leftrightarrow \exists i \in M : a \prec_i b \\ a \oplus i &:= \pi(\iota(a) \oplus i) \end{aligned}$$

Für $a \prec b$ sprechen wir „$a$ ist lektisch kleiner als $b$“.

Im folgenden sei stets $M \subseteq V$ $\vee$-dichte Teilmenge, die mittels $\prec$ vollständig geordnet ist.

Wir können dann für einen Hüllenoperator $\gamma : V \to V$ die Menge $\mathfrak{H}_\gamma$ aller Hüllen lektisch erzeugen:

[1] Achtung: Ich weiche hier von den in [GaWi96] verwendeten Bezeichnungen ab!

**4.3.6. Hilfssatz.** *Sei $\gamma : V \to V$ Hüllenoperator. Dann gilt für $a, b, c \in V$ und $i, j \in M$:*

1. *Durch $\prec$ ist auf $V$ eine vollständige Ordnung definiert, mit $a < b \Rightarrow a \prec b$.*
2. *Ist $a \prec_i b$ und $a \prec_j c$ mit $i \prec j$, so gilt: $c \prec_i b$.*
3. *$a \prec_i b \Rightarrow a \oplus i \leq b$*
4. *$a \prec_i b \, und \, b = \gamma(b) \Rightarrow a \prec_i \gamma(a \oplus i)$*

*Beweis:*
1. Die Vollständigkeit der lektischen Ordnung folgt aus der Definition: Sie ist die Projektion einer vollständigen Ordnung der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ auf $V$. (Es gilt nämlich $a \prec b \Leftrightarrow \iota(a) \prec \iota(b)$.)
Sei $a < b$. Es gilt $a = \pi(\iota(a))$ und $b = \pi(\iota(b))$. Also muß $\iota(a) \neq \iota(b)$ sein. Aus der Monotonie von $\iota$ folgt schließlich $\iota(a) \subsetneq \iota(b)$, d.h. $\iota(a) \prec \iota(b)$. Dies ist widerum äquivalent zu $a \prec b$.
2. Für $k \in M$ mit $k \prec i$ gilt: $k \leq a \Leftrightarrow k \leq b \Leftrightarrow k \leq c$. Aus $a \prec_i b$ folgt $i \leq b$ und $i \not\leq a$. Da $a \prec_j c$ mit $j \succ i$, ist auch $i \not\leq c$, also gilt insgesamt $c \prec_i b$.
3. Aus $a \prec_i b$ folgt $\iota(a) \cap \{k \in M | k \prec i\} \subseteq \iota(b)$ und $i \in \iota(b)$, also ist auch $\iota(a) \oplus i \subseteq \iota(b)$. Mit der Monotonie von $\pi$ folgt $a \oplus i = \pi(\iota(a) \oplus i) \leq \pi(\iota(b)) = b$.
4. Aus $a \prec_i b$ folgt nach (3) $a \oplus i \leq b$, also ist auch $c := \gamma(a \oplus i) \leq \gamma(b) = b$. Das heißt, entweder ist $c = b$, dann ist die Behauptung trivial, oder es gibt ein $j \in M$ mit $c \prec_j b$.
Weiter ist $i \not\leq a$, also ist $a \prec_i a \oplus i$. Aus $a \oplus i \leq c$ folgt $a \prec_k c$ mit $k \preceq i$. Insgesamt haben wir $a \prec_k c \prec_j b$, woraus folgt: $a \prec_l b$, mit $l = \min(k, j)$. Wir haben allerdings vorausgesetzt $a \prec_i b$, also ist $i = l \preceq k$.
Insgesamt ist also $k = i$, und die Behauptung gezeigt. □

**4.3.7. Satz.** *Sei $\gamma : V \to V$ Hüllenoperator. Für $a \in V$ ist die bezüglich der lektischen Ordnung kleinste Hülle, welche echt größer als $a$ ist, gleich*

$$\gamma(a \oplus i),$$

*wobei $i$ das größte Element von $M$ ist mit $a \prec_i \gamma(a \oplus i)$.*

*Beweis:* Sei $a^+$ die kleinste Hülle bezüglich der lektischen Ordnung mit $a \prec a^+$. Es gibt also ein $i \in M$ mit $a \prec_i a^+$. Nach 4.3.6(4) ist also $a \prec_i \gamma(a \oplus i)$. Andererseits ist nach 4.3.6(3) $a \oplus i \leq a^+$, also auch $\gamma(a \oplus i) \leq \gamma(a^+) = a^+$. Weil $a^+$ die lektisch kleinste Hülle oberhalb von $a$ ist, und weil $a \prec \gamma(a \oplus i) \leq a^+$, muß $\gamma(a \oplus i) = a^+$ sein.
Daß $i$ das größte Element ist mit $a \prec_i \gamma(a \oplus i)$, ergibt sich aus 4.3.6(2): Ist $i \prec j$, so würde aus $a \prec_j \gamma(a \oplus j)$ folgen: $\gamma(a \oplus j) \prec_i \gamma(a \oplus i) = a^+$, was ein Widerspruch zur Minimalität von $a^+$ wäre. □

Damit können wir einen Algorithmus angeben, welcher für einen Hüllenoperator $\gamma \colon V \to V$ alle Hüllen $\mathfrak{H}_\gamma \subseteq V$ berechnet:

**4.3.8. Algorithmus.** (Hüllen) Sei ohne Einschränkung $M := \{1, \ldots, n\} \subseteq V$ $\vee$-dichte Menge in $V$. Der Algorithmus berechnet dann zu gegebenem Hüllenoperator $\gamma$ die Menge $\mathfrak{H}_\gamma$ aller Hüllen in lektischer Ordnung.

```
begin
  if γ(0_V) = 0_V then 𝔥_γ := {0_V}; else 𝔥_γ := ∅; fi
  a := 0_V;
  repeat
    i := n;  b := γ(a ⊕ i);
    while not a ≺_i b do
      i := i − 1;
      if i = 0 then return 𝔥_γ; fi
      b := γ(a ⊕ i);
    od
    a := b;
    𝔥_γ := 𝔥_γ ∪ {a};
  for ever
end.
```

Um den Aufwand von diesem Algorithmus zu betrachten, benötigen wir eine neue Hilfskonstante: $c_\gamma$ gebe den Aufwand wieder, mit dem man $\gamma(a)$ für ein $a \in V$ berechnen kann. Wir gehen davon aus, daß $c_\gamma \geq c_V$ ist. (Allein die Zuweisung von $\gamma(a)$ an eine Variable hat bereits den Aufwand $c_V$.)

Da $a \oplus i$ mit $O(c_V)$ Operationen berechenbar ist, können wir zur Berechnung von $b := \gamma(a \oplus i)$ den Aufwand $O(c_\gamma)$ veranschlagen. Die innere `while`-Schleife wird höchstens $|M|$ mal durchlaufen, und die äußere `repeat`-Schleife für jede Hülle einmal. Also erhalten wir als Abschätzung für den Aufwand:

$$O(|\mathfrak{H}_\gamma| * |M| * c_\gamma).$$

### 4.3.3 Die Duquenne-Guigues-Basis

Allerdings sind wir eigentlich an den Pseudohüllen des Hüllenoperators interessiert, und nicht nur an den Hüllen. Um diesen Algorithmus auf unser Problem anwenden zu können, zeigen wir zunächst folgenden Hilfssatz:

**4.3.9. Hilfssatz.** *Die Menge $\mathfrak{P}_\gamma$ aller Hüllen und Pseudohüllen von $\gamma$ bildet einen $\wedge$-Unterhalbverband von $V$.*

*Beweis:* $1_V$ ist Hülle. Für $p \in V$ gilt genau dann $p \in \mathfrak{P}_\gamma$, wenn für alle Pseudohüllen $q < p$ auch $\gamma(q) \leq p$ gilt. Sei nun $A \subseteq \mathfrak{P}_\gamma$, und sei $q$ beliebige Pseudohülle. Dann folgt aus $q < \bigwedge A$ bereits $q < p$ für alle $p \in A$. Da all diese $p$ in $\mathfrak{P}_\gamma$ liegen, gilt auch $\gamma(q) \leq p$ für alle $p \in A$, also $\gamma(q) \leq \bigwedge A$. Also ist $\bigwedge A$ Hülle oder Pseudohülle. □

Wir haben also einen weiteren Hüllenoperator

$$\gamma^* := \gamma_{(\mathfrak{P}_\gamma)} : V \to V, a \mapsto \bigwedge\{b \in \mathfrak{P}_\gamma | a \leq b\}$$

Gehen wir davon aus, wir würden bereits die $m$ lektisch kleinsten Hüllen und Pseudohüllen von $\gamma$ kennen: $\mathfrak{P}_\gamma^m := \{p_1, \ldots, p_m\}$. Ähnlich wie in 4.1.3 betrachten wir dann zu $a \in V$ den Fixpunkt $\mathfrak{P}_\gamma^m(a)$ der Folge

$$\begin{aligned} a^{\mathfrak{P}_\gamma^m} &:= a \vee \bigvee\{\gamma(p) | p \in \mathfrak{P}_\gamma^m \text{ Pseudohülle mit } p < a\}, \\ a^{\mathfrak{P}_\gamma^m \mathfrak{P}_\gamma^m} &:= a^{\mathfrak{P}_\gamma^m} \vee \bigvee\{\gamma(p) | p \in \mathfrak{P}_\gamma^m \text{ Pseudohülle mit } p < a^{\mathfrak{P}_\gamma^m}\}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Das heißt, wir definieren $\mathfrak{P}_\gamma^m(a) := a^{\mathfrak{P}_\gamma^m \cdots \mathfrak{P}_\gamma^m}$, mit $\mathfrak{P}_\gamma^m(a) = \mathfrak{P}_\gamma^m(a)^{\mathfrak{P}_\gamma^m}$. Dann erhalten wir:

**4.3.10. Hilfssatz.** *Ist $\mathfrak{P}_\gamma^m$ die Menge der $m$ lektisch kleinsten Hüllen und Pseudohüllen zu $\gamma$, und ist $a \in V$, sodaß $\gamma^*(a)$ die lektisch nächstgrößere Hülle oder Pseudohülle ist, so gilt*

$$\gamma^*(a) = \mathfrak{P}_\gamma^m(a).$$

*Beweis:*
1. Es gilt: $\mathfrak{P}_\gamma^m(a) \leq \gamma^*(a)$.
Wir zeigen: Ist $p \in \mathfrak{P}_\gamma$ und $a \leq p$, so gilt: $\mathfrak{P}_\gamma^m(a) \leq p$. Angenommen, letzteres gilt nicht: $\mathfrak{P}_\gamma^m(a) \not\leq p$. Dann gibt es ein $a_0 = a^{\mathfrak{P}_\gamma^m \cdots \mathfrak{P}_\gamma^m}$ mit $a_0 \leq p$ und $a_0^{\mathfrak{P}_\gamma^m} \not\leq p$. Betrachten wir $Q := \{q | q \in \mathfrak{P}_\gamma^m \text{ ist Pseudohülle und } q < a_0\}$, so gilt für alle $q \in Q$ auch $q < p$. Damit ist $\gamma(q) \leq p$, also gilt $a_0^{\mathfrak{P}_\gamma^m} = a_0 \vee \bigvee\{\gamma(q) | q \in Q\} \leq p$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition von $a_0$.
2. $\mathfrak{P}_\gamma^m(a) \in \mathfrak{P}_\gamma$:
Sei $p < \mathfrak{P}_\gamma^m(a)$ Pseudohülle. Dann ist wegen (1) $p < \gamma^*(a)$, also $p \in \mathfrak{P}_\gamma^m$. (Nach Definition von $a$ ist $\gamma^*(a)$ die lektisch kleinste Hülle oder Pseudohülle, die nicht in $\mathfrak{P}_\gamma^m$ enthalten ist.) Damit ist auch $\gamma(p) \leq \mathfrak{P}_\gamma^m(a)^{\mathfrak{P}_\gamma^m} = \mathfrak{P}_\gamma^m(a)$. Da wir die Pseudohülle $p < \mathfrak{P}_\gamma^m(a)$ beliebig gewählt haben, ist demnach $\mathfrak{P}_\gamma^m(a)$ eine Hülle oder Pseudohülle, also gleich $\gamma^*(a)$. □

**4.3.11. Satz.** *Sind bereits die $m$ (lektisch) kleinsten Hüllen und Pseudohüllen $\mathfrak{P}_\gamma^m = \{p_1, \ldots, p_m\}$ bekannt, so erhält man die lektisch nächstgrößere Hülle oder Pseudohülle durch*

$$p_{m+1} = \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus i),$$

*wobei $i$ maximal ist mit $p_m \prec_i \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus i)$.*

*Beweis:* Nach 4.3.7 ist die lektisch nächstgrößere Hülle oder Pseudohülle gleich $p_{m+1} := \gamma^*(p_m \oplus i)$, mit maximalem $i$, sodaß $p_m \prec_i \gamma^*(p_m \oplus i)$.

Für dieses $i$ gilt nach 4.3.10 auch: $\gamma^*(p_m \oplus i) = \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus i)$. Für $j \in M$ mit $i \prec j$ wissen wir aber nicht, ob $\gamma^*(p_m \oplus j) = \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$ gilt. Also müssen wir noch nachweisen, daß $i$ maximal ist mit $p_m \prec_i \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus i)$.
Nehmen wir an, es gilt für ein $j \in M$ mit $i \prec j$: $p_m \prec_j \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$. Dann können wir zumindest $\gamma^*(p_m \oplus j) \neq \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$ folgern. Also muß es eine Pseudohülle $p \notin \mathfrak{P}_\gamma^m$ geben, mit $p < \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$ und $\gamma(p) \not\leq \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$. Da $p \notin \mathfrak{P}_\gamma^m$ gilt, ist $p$ lektisch größer als $p_m$. Es gibt also gewisse $k, l \in M$, sodaß $p_m \prec_k p \prec_l \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$ gilt.
Da wir $p_m \prec_j \mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus j)$ angenommen haben, muß $j \preceq k$ sein, also $i \prec k$. Mit 4.3.6(2) folgt also aus $p_m \prec_i p_{m+1}$ und $p_m \prec_k p$ mit $i \prec k$ der Widerspruch: $p_m \prec p \prec p_{m+1}$. □

Um $\mathfrak{P}_\gamma^m(p_m \oplus i)$ zu berechnen, können wir eine leichte Variation des Algorithmus von Linclosure verwenden – LINCLOSURE*. Hierzu speichern wir im Falle von $count(x \to y) = 0$ zunächst die Implikationen in einer Liste *use*. (Dabei ignorieren wir gleich alle Implikationen, die nichts Neues bringen, d.h. solche mit $y \leq b$.) Erst wenn wir auf eine Implikation $x \to y$ stoßen, deren Prämisse echt kleiner als $b$ ist ($x < b$), gilt nach der Anwendung von $x \to y$ auf $b$ die Bedingung $v < b$ auch für die zwischengespeicherten Implikationen $v \to w \in use$. Also wenden wir dann all diese Implikationen auf $b$ an und löschen *use*.

**4.3.12. Algorithmus.** (LINCLOSURE*) $\mathfrak{I}$ enthalte bereits die $m$ lektisch kleinsten Implikationen der Duquenne-Guigues-Basis eines Hüllenoperators. Weiterhin seien die globalen Variablen $impl(m)$ für $m \in M$ wie bei LINCLOSURE (4.3.1) belegt. Der Algorithmus berechnet dann für geeignete $a \in V$ (siehe 4.3.11) die lektisch nächstgrößere Hülle oder Pseudohülle $\gamma^*(a)$.

```
begin
  b := a;
  for each x → y ∈ ℑ do
    count(x → y) := |ι(x)|;
    if |ι(x)| = 0 then b := b ∨ y; fi
  od
  update := ι(b); finished := ι(b);
  use := ∅;

  while update ≠ ∅ do
    choose m ∈ update; update := update − m;
    for each x → y ∈ impl(m) do
      count(x → y) := count(x → y) − 1;
      if count(x → y) = 0 then
        if y ≤ b then continue; fi
        use := use ∪ {x → y};
        if b ≠ x then
          for each v → w ∈ use do
```

```
          b := b ∨ w;
        od
        use := ∅;
        add := ι(b) − finished;
        finished := finished ∪ add;
        update := update ∪ add;
      fi
    fi
  od
 od
 return b;
end.
```

Am Aufwand des Algorithmus ändert sich nichts im Vergleich zu LINCLOSURE, denn für jede Implikation $x \to y$ wird höchstens einmal $y \leq b$ und $b \neq x$ getestet und es wird höchstens einmal auf $b := b \vee w$ ausgeführt:

$$O(|\mathfrak{I}| * c_V)$$

Der endgültige Algorithmus zur Berechnung der Duquenne-Guigues-Basis $\mathfrak{I}$ von $\gamma$ beruht dann auf dem Algorithmus HÜLLEN (4.3.8). Als Nebenprodukt erhält man gleichzeitig die Menge $\mathfrak{H}_\gamma$ aller Hüllen von $\gamma$:

**4.3.13. Algorithmus.** (DUQUENNE-GUIGUES) Sei o.E. $M := \{1, \ldots, n\} \subseteq V$ eine $\vee$-dichte Teilmenge. Zu einem Hüllenoperator $\gamma$ wird die Duquenne-Guigues-Basis $\mathfrak{I}$ und das Hüllensystem $\mathfrak{H}_\gamma$ berechnet:

```
begin
  for each m ∈ M do impl(m) = ∅;
  if γ(0_V) = 0_V then
    𝔥_γ := {0_V}; ℑ := ∅;
  else
    𝔥_γ := ∅; ℑ := {0_V → γ(0_V)};
  fi
  a := 0_V;

  repeat
    i := n; b :=LINCLOSURE*(a ⊕ i);
    while not a ≺_i b do
      i := i − 1;
      if i = 0 then return ℑ,𝔥_γ; fi
      b :=LINCLOSURE*(a ⊕ i);
    od
    a := b;
```

```
    if γ(a) = a then
      𝔥_γ := 𝔥_γ ∪ {a};
    else
      ℑ := ℑ ∪ {a → γ(a)};
      for each m ∈ M with m ≤ a do
        impl(m) := impl(m) ∪ {a → γ(a)};
      od
    fi
  for ever
end.
```

Im Initialisierungsteil ist die Berechnung von $\gamma(0_V)$ am aufwendigsten, also ist dieser Teil bestimmt nicht ausschlaggebend für den Gesamtaufwand des Algorithmus. Die `repeat`-Schleife wird für jede Hülle und jede Pseudohülle einmal durchlaufen. Weiter wird die innere `while`-Schleife höchstens $|M|$ mal durchlaufen, und der Anweisungsteil dieser Schleife hat den Aufwand von LINCLOSURE*, also $O(|\mathfrak{I}| * c_V)$. In jedem Durchlauf der `repeat`-Schleife wird zusätzlich $\gamma(a)$ berechnet, was $O(c_\gamma)$ Operationen benötigt. Die Reinitialisierung der globalen Variablen $impl(m)$, $m \in M$ benötigt $O(|M|) \leq O(c_\gamma)$ Schritte, ist also nicht ausschlaggebend. Der Aufwand des Algorithmus DUQUENNE-GUIGUES beträgt also insgesamt

$$O(|\mathfrak{P}_\gamma| * \max(c_\gamma, |M| * |\mathfrak{I}| * c_V))$$

**4.3.14. Beispiel.** In einem klassischen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ kann man die zweite Ableitung mit $c_\gamma = O(|G| * |M|)$ Operationen berechnen. $c_V$ ist in diesem Fall gleich $|M|$, also kann man die Duquenne-Guigues-Basis $\mathfrak{I}$ eines klassischen Kontextes mit Aufwand

$$O((|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| + |\mathfrak{I}|) * |M| * \max(|G|, |M| * |\mathfrak{I}|))$$

berechnen.
Die Abweichung zu den Angaben in [Boe97] ($O((|\mathfrak{B}(\mathbb{K})| + |\mathfrak{I}|) * |M|^2 * |\mathfrak{I}|^2)$) läßt sich wie folgt erklären: Zum einen wurde in [Boe97] nicht der Algorithmus LINCLOSURE* verwendet, sondern der naive Algorithmus, welcher durch 4.1.3 nahegelegt wird. Dies begründet den Mehraufwand von $|\mathfrak{I}|$. Zum anderen wurde nicht berücksichtigt, daß zur Berechnung der Implikation $p \to \gamma(p)$ die zweite Ableitung berechnet werden muß.
Geht man in obiger Aufwandsbetrachtung vereinfachend davon aus, daß die Größenordnungen von $|G|$ und $|M|$, sowie von $|\mathfrak{B}(\mathbb{K})|$ und $|\mathfrak{I}|$ gleich sind, so kann man sich als Faustregel merken: Der Aufwand zur Berechnung der Duquenne-Guigues-Basis eines klassischen Kontextes $\mathbb{K} = (G, M, I)$ beträgt:

$$O(|\mathfrak{I}|^2 * |M|^2)$$

## 4.4 Beispiel: Fuzzykontexte

Wir betrachten als nicht-triviales Beispiel Implikationen in Fuzzykontexten. Sei hierzu $L$ eine Fuzzy-Algebra und $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R})$ ein $L$-Fuzzykontext. Die übliche Notation birgt die Gefahr von Verwechslungen zwischen der Pfeilrelation der Fuzzyalgebra $L$ und den Implikationen. Aufgrund der Tatsache, daß eine Pfeilrelation immer zwischen Elementen von $L$ steht, und eine Implikation zwischen $L$-Fuzzy-Mengen, müßte allerdings stets aus dem Zusammenhang deutlich werden, was gemeint ist.

Für Fuzzy-Teilmengen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{P}_L(M)$ gilt die Implikation $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ nach Satz 4.2.2 genau dann in $\mathbb{K}$, wenn $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}''$ ist. Dies können wir mit Hilfe der unscharfen Logik verallgemeinern, welche durch $L$ gegeben ist (siehe Definition 2.2.7 auf Seite 26) : Wir ordnen der Aussage „$\mathcal{A}$ impliziert $\mathcal{B}$“ den Wahrheitswert

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A} \to \mathcal{B}] &:= [\mathcal{B} \subseteq_L \mathcal{A}''] \\
&= \bigwedge_{m \in M} (\mathcal{B}(m) \to \mathcal{A}''(m)) \\
&= \bigwedge_{g \in G} \Big( \bigwedge_{m \in M} (\mathcal{A}(m) \to \mathcal{R}(g, m)) \to \bigwedge_{m \in M} (\mathcal{B}(m) \to \mathcal{R}(g, m)) \Big)
\end{aligned}$$

zu. Wie wir sehen, *gilt* (nach Definition 4.2.1) die Implikation genau dann in $\mathbb{K}$, wenn $[\mathcal{A} \to \mathcal{B}] = 1$ ist.

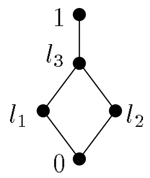
Will man per Hand überprüfen, ob eine Implikation $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R}) = (\mathfrak{P}_L(G), \mathfrak{P}_L(W)^M, \varphi)$ gilt, so ist dies einfacher über einen inzidenzisomorphen klassischen Kontext $\tilde{\mathbb{K}} = (\tilde{G}, \tilde{M}, \tilde{I})$ möglich. Einen solchen erhält man mit $\vee$-dichtem $\bar{L} \subseteq L$: $\tilde{G} := \bar{L} \cdot G$, $\tilde{M} := \bar{L} \cdot M$ und $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{\tilde{G}, \tilde{M}}(\varphi)$. (Nach Beispiel 2.3.1(3) sind nämlich $\tilde{G} \subseteq \mathfrak{P}_L(G)$ und $\tilde{M} \subseteq \mathfrak{P}_L(W)^M$ $\vee$-dichte Teilmengen, also sind nach 2.4.9 $\mathbb{K}$ und $\tilde{\mathbb{K}}$ inzidenzisomorph.) Man testet dann einfach in der Tabelle zu $\tilde{I}$, ob folgendes gilt:

$$\{l \cdot m \in \tilde{M} | l \cdot m \leq \mathcal{B}\} \subseteq \{l \cdot m \in \tilde{M} | l \cdot m \leq \mathcal{A}\}''$$

Im folgenden vollziehen wir den Algorithmus Duquenne-Guigues an einem konkreten Beispiel nach. Dazu verwenden wir die Fuzzy-Algebra $(L, \wedge, \vee, \cdot, \to)$ mit $L := \{0, l_1, l_2, l_3, 1\}$. Die Verbandsstruktur und die Verknüpfungstabellen der Operationen $\cdot$ und $\to$ sind in Abb. 4.2 angegeben.

Weiter betrachten wir den $L$-Fuzzykontext $\mathbb{K} = (G, M, \mathcal{R})$ mit $G := \{g_1, g_2, g_3\}$, $M := \{m_1, m_2\}$ und der der Inzidenzrelation

| $\mathcal{R}$ | $m_1$ | $m_2$ |
|---|---|---|
| $g_1$ | $l_1$ | $l_1$ |
| $g_2$ | $l_2$ | $l_2$ |
| $g_3$ | $l_1$ | $1$ |




$L$

| $\cdot$ | 0 | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $l_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $l_1$ |
| $l_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $l_2$ |
| $l_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $l_3$ |
| 1 | 0 | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | 1 |

| $\to$ | 0 | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $l_1$ | $l_3$ | 1 | $l_3$ | 1 | 1 |
| $l_2$ | $l_3$ | $l_3$ | 1 | 1 | 1 |
| $l_3$ | $l_3$ | $l_3$ | $l_3$ | 1 | 1 |
| 1 | 0 | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | 1 |

Abbildung 4.2: Die Fuzzy-Algebra $L$.

Wie wir bereits erwähnt haben, können wir Ableitungen besser aus einem klassischen Kontext ablesen. Dazu verwenden wir die $\vee$-dichte Teilmenge $\bar{L} := \{1, l_1, l_2\}$ von $L$, und erhalten $\widetilde{\mathbb{K}} = (\bar{L} \cdot G, \bar{L} \cdot M, \tilde{I})$ mit $\tilde{I} := \mathrm{IR}_{\tilde{G},\tilde{M}}(\varphi)$:

| $\tilde{I}$ | $m_1$ | $l_1 \cdot m_1$ | $l_2 \cdot m_1$ | $m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_1$ | | × | | | × | |
| $l_1 \cdot g_1$ | × | × | × | × | × | × |
| $l_2 \cdot g_1$ | | × | × | | × | × |
| $g_2$ | | | × | | | × |
| $l_1 \cdot g_2$ | | × | × | | × | × |
| $l_2 \cdot g_2$ | × | × | × | × | × | × |
| $g_3$ | | × | | × | × | × |
| $l_1 \cdot g_3$ | × | × | × | × | × | × |
| $l_2 \cdot g_3$ | | × | × | × | × | × |

Um den Algorithmus Duquenne-Guigues (4.3.13) anwenden zu können, benötigen wir eine vollständige Ordnung auf der $\vee$-dichte Teilmenge $\bar{L} \cdot M \subseteq M$. Hierzu numerieren $\bar{L} \cdot M$ in folgender Reihenfolge durch:

$$\bar{L} \cdot M = \{m_1, l_1 \cdot m_1, l_2 \cdot m_1, m_2, l_1 \cdot m_2, l_2 \cdot m_2\}.$$

(Es ist sinnvoll $m_1$ niedriger zu beziffern als $l_1 \cdot m_1$ und $l_2 \cdot m_1$, weil man sich dadurch überflüssige Tests im Algorithmus erspart. Natürlich würde der Algorithmus auch andernfalls funktionieren.)

Wir besprechen nun Schritt für Schritt den Algorithmus 4.3.13 (auf Seite 105) und berechnen dadurch die Begriffsinhalte $\mathfrak{H}_\gamma$ und die Duquenne-Guigues-Basis $\mathfrak{I}$ von $\mathbb{K}$.

Im Initialisierungsteil ist zu beachten, daß für die leere Fuzzy-Menge $0_{\mathfrak{P}_L(M)} = \emptyset$

gilt: $\emptyset'' = \emptyset$, also setzen wir $\mathfrak{H}_\gamma := \{\emptyset\}$ und $\mathfrak{I} := \{\}$. Wir starten in die `repeat`-Schleife mit $a := \emptyset$.

Im ersten Schleifendurchlauf wird ein (lektisch) maximales $i \in \bar{L} \cdot M$ gesucht, sodaß für $b :=$ LINCLOSURE$^*(a \oplus i)$ gilt: $a \prec_i b$. Das lektisch größte Element in $\bar{L} \cdot M$ ist $i := l_2 \cdot m_2$. Es gibt bisher noch keine Pseudoinhalte, also ist: $b :=$ LINCLOSURE$^*(\emptyset \oplus l_2 \cdot m_2) = l_2 \cdot m_2$. Die Bedingung $a \prec_i b$ trifft zu, also ist der lektisch nächstgrößere Begriffs- oder Pseudoinhalt gleich $l_2 \cdot m_2$. Betrachten wir die zweite Ableitung, so sehen wir: $(l_2 \cdot m_2)'' = l_2 \cdot m_2$, also setzen wir $\mathfrak{H}_\gamma := \{\emptyset, l_2 \cdot m_2\}$.

Wir kommen in den zweiten Schleifendurchlauf mit $a := l_2 \cdot m_2$. Da es noch keine Pseudoinhalte gibt, verläuft dieser ähnlich einfach wie der erste: $i := l_2 \cdot m_2$ brauchen wir wegen $l_2 \cdot m_2 \leq a$ gar nicht erst zu testen, denn grundsätzlich folgt aus $i \leq a$ immer $a \oplus i \leq a$. Damit ist auch der lektisch kleinste Begriffs- oder Pseudoinhalt $\gamma^*(a \oplus i)$, welcher größer als $a \oplus i$ ist, $\preceq a$. Also kann mit $b :=$ LINCLOSURE$^*(a \oplus i)$ die gewünschte Bedingung $a \prec_i b$ gar nicht erfüllt sein, da $b \preceq a$ gilt.

Das nächstkleinere $i \in \bar{L} \cdot M$ ist $i := l_1 \cdot m_2$. Für diesen Kandidaten erhalten wir $b :=$ LINCLOSURE$^*(l_2 \cdot m_2 \oplus l_1 \cdot m_2) =$ LINCLOSURE$^*(l_1 \cdot m_2) = l_1 \cdot m_2$, und es gilt $b \prec_i a$. Also ist $l_1 \cdot m_2$ der nächste Begriffs- oder Pseudoinhalt. Die zweite Ableitung ist $(l_1 \cdot m_2)'' = l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2$. Wir haben also unseren ersten Pseudoinhalt und setzen $\mathfrak{I} := \{(l_1 \cdot m_2) \rightarrow (l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2)\}$. Die Reinitialisierung der Variablen $impl(m)$, $m \in M$, ist für den Algorithmus LINCLOSURE$^*$ notwendig.

Der dritte Durchlauf wird interessanter, weil wir das erste mal einen Pseudoinhalt berücksichtigen müssen, d.h. der Algorithmus LINCLOSURE$^*$ ist nicht mehr trivial. Es ist $a := l_1 \cdot m_2$. Für $i := l_2 \cdot m_2$ ist $a \oplus i = l_3 \cdot m_2$. Weil der Pseudoinhalt $l_1 \cdot m_2$ echt kleiner als $l_3 \cdot m_2$ ist, gilt $b :=$ LINCLOSURE$^*(a \oplus i) =$ LINCLOSURE$^*(l_3 \cdot m_2)$ $= l_3 \cdot m_2 \cup (l_1 \cdot m_2)'' = l_1 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$. Damit ist $a \prec_{l_1 \cdot m_1} b$, d.h. $b$ ist *nicht* der gesuchte Begriffs- oder Pseudoinhalt.

Für die nächstkleineren $i \in \bar{L} \cdot M$ schlägt der Test auch fehl: $i := l_1 \cdot m_2$ ist $\leq a$, und für $i := m_2$ ist $l_1 \cdot m_2 < a \oplus i = m_2$. Damit ist $l_1 \cdot m_1 < b :=$ LINCLOSURE$^*(a \oplus i)$, d.h. es gibt ein $j < i$ mit $a \prec_j b$.

Also müssen wir ein weiteres $i \in \bar{L} \cdot M$ testen. Für $i := l_2 \cdot m_1$ gilt: $a \oplus i = l_2 \cdot m_1$, $b :=$ LINCLOSURE$^*(l_2 \cdot m_1) = l_2 \cdot m_1$ (denn für kein $x \rightarrow y \in \mathfrak{I}$ gilt $x < l_2 \cdot m_1$), und schließlich ist $a \prec_i l_2 \cdot m_1$ erfüllt. Wir haben also den lektisch nächstgrößten Begriffs- oder Pseudoinhalt gefunden. Es gilt $(l_2 \cdot m_1)'' = l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2$, also setzen wir $\mathfrak{I} = \{(l_1 \cdot m_2) \rightarrow (l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2), (l_2 \cdot m_1) \rightarrow (l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2)\}$ und reinitialisieren die globalen Variablen $impl(m)$, $m \in M$.

Die nächsten Schritte besprechen wir nicht mehr so ausführlich. Tabelle 4.1 gibt für jeden Schleifendurchlauf $a$ und für jedes getestete $i \in \bar{L} \cdot M$ den Wert $b :=$ LINCLOSURE$^*(a \oplus i)$, sowie das größte $j \in \bar{L} \cdot M$ mit $a \prec_j b$ an. Ist $j = i$, so ist weiterhin der Begriffsinhalt $b$ bzw. die Implikation $b \rightarrow b''$ zu sehen.

| $a$ | $i$ | $b$ | $j : a \prec_j b$ | BI/PI | Begriffsinhalt | Implikation |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\emptyset$ | | $\times$ | $\emptyset$ | |
| $\emptyset$ | $l_2 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ | $\times$ | $l_2 \cdot m_2$ | |
| $l_2 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | $\times$ | | $(l_1 \cdot m_2) \rightarrow (l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2)$ |
| $l_1 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_1$ | | | |
| | $m_2$ | $l_1 \cdot m_1 + m_2$ | $l_1 \cdot m_1$ | | | |
| | $l_2 \cdot m_1$ | $l_2 \cdot m_1$ | $l_2 \cdot m_1$ | $\times$ | | $(l_2 \cdot m_1) \rightarrow (l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2)$ |
| $l_2 \cdot m_1$ | $l_2 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ | $\times$ | $l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2$ | |
| $l_2 \cdot m_1 + l_2 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | $l_3 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_1$ | | | |
| | $m_2$ | $l_3 \cdot m_1 + m_2$ | $l_1 \cdot m_1$ | | | |
| | $l_1 \cdot m_1$ | $l_1 \cdot m_1$ | $l_1 \cdot m_1$ | $\times$ | | $(l_1 \cdot m_1) \rightarrow (l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2)$ |
| $l_1 \cdot m_1$ | $l_2 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | | | |
| | $l_1 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_2$ | $\times$ | $l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2$ | |
| $l_1 \cdot m_1 + l_1 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ | $l_1 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_2$ | $\times$ | $l_1 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | |
| $l_1 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $m_2$ | $l_1 \cdot m_1 + m_2$ | $m_2$ | $\times$ | $l_1 \cdot m_1 + m_2$ | |
| $l_1 \cdot m_1 + m_2$ | $l_2 \cdot m_1$ | $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $l_2 \cdot m_1$ | $\times$ | $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | |
| $l_3 \cdot m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $m_2$ | $l_3 \cdot m_1 + m_2$ | $m_2$ | $\times$ | $l_3 \cdot m_1 + m_2$ | |
| $l_3 \cdot m_1 + m_2$ | $m_1$ | $m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $m_1$ | $\times$ | | $(m_1 + c \cdot m_2) \rightarrow (m_1 + m_2)$ |
| $m_1 + l_3 \cdot m_2$ | $m_2$ | $m_1 + m_2$ | $m_2$ | $\times$ | $m_1 + m_2$ | |
| $m_1 + m_2$ | | | $\nexists i \in M : a \prec_i b$, Abbruch | | | |

Tabelle 4.1: Werte der Variablen im Algorithmus DUQUENNE-GUIGUES.

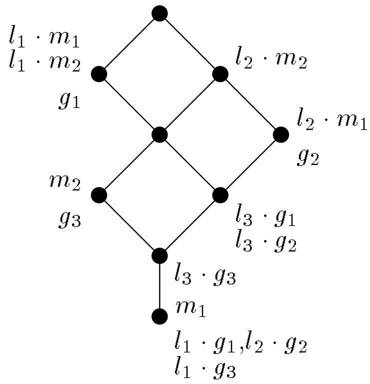



Abbildung 4.3: Der Begriffsverband des Fuzzykontextes $\mathbb{K}$

Wie wir bereits erwähnt haben, kann man, falls $Y$ distributiver Verband ist, die rechten Seiten der Implikationen der Duquenne-Guigues-Basis reduzieren (siehe Seite 92). Da $\mathfrak{P}_L(M)$ distributiv ist, bilden also auch folgende Implikationen eine Basis zu $\gamma$:

$$\begin{aligned}
(l_1 \cdot m_2) &\to (l_1 \cdot m_1) \\
(l_2 \cdot m_1) &\to (l_2 \cdot m_2) \\
(l_1 \cdot m_1) &\to (l_1 \cdot m_2) \\
(m_1 + l_3 \cdot m_2) &\to (m_2)
\end{aligned}$$

Neben der Duquenne-Guigues Basis erhalten wir aus dem Algorithmus auch den Begriffsverband $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$, welcher in Abbildung 4.3 zu sehen ist.

# Anhang A

# Bereinigung und Reduzierung eines klassischen Kontextes

Der inzidenzisomorphe klassische Kontext zu einem mehrwertigen Kontext oder Fuzzykontext ist meist sehr groß. Dadurch können bereits die Bereinigung und Reduzierung kritische Zeiten beanspruchen. Wir versuchen also, die bereits vorhandenen Algorithmen (siehe [Boe97]) zu beschleunigen. Als zugrundeliegende Idee verwenden wir dabei einen effizienten Sortieralgorithmus: Wir sortieren im Falle der Gegenstandsbereinigung die Gegenstände nach deren Ableitungen. Hierbei verwenden wir die lektische Ordnung auf $\mathfrak{P}(M)$.

Es ist dabei nicht notwendig, Zeilen in der die Inzidenzrelation darstellenden Matrix zu vertauschen. Stattdessen legen wir einen Indexvektor $V$ über die Zeilen der Matrix an. Weil das Vertauschen von Indizes nur geringen Zeitaufwand benötigt, verwenden wir den Algorithmus HEAPSORT (siehe [Schi]). Dieser Algorithmus benötigt zum Sortieren eines Vektors $V$ der Länge $n$ $O(n \log(n))$ Vergleiche.

Dabei wird der Vektor als *binärer Baum* aufgefaßt: Jedes Element des Vektors ist ein Knoten des Baumes. Das $i$-te Element hat dabei als Söhne die Elemente $2i$ und $2i+1$. (Die Indizierung des Vektors beginnt bei 1.) Wurzel des Baumes ist demnach 1 und Endknoten sind die $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \ldots, n$. (Falls $n$ die Länge des Vektors bezeichnet.) In einem binären Baum ist jedes Element $i$ auch Wurzel eines Teilbaumes, den wir der Einfachheit halber auch mit $i$ bezeichnen.

Ein *Heap* ist nun ein binärer Baum mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß das Element des Vaterknotens immer größer als die Elemente an den Söhnen ist: $V(i) \geq V(2i)$ und $V(i) \geq V(2i+1)$. Das heißt, das größte Element eines Heaps steht immer an der Wurzel $V(1)$.

Mit folgendem Algorithmus kann man sukzessive einen Heap im binären Baum $V$ der Länge $n$ aufbauen:

**A.0.1. Algorithmus.** (HEAP) Gegeben sei ein Vektor $V$, die Länge $n$ des Vektors, sowie ein Teilbaum $i$ des Vektors. (Dabei gelte $i \leq n$.) Die Teilbäume $2i$ und $2i+1$ seien bereits Heaps (soweit sie existieren, d.h. $\leq n$ sind). Dann erzeugt der Algorithmus den Heap $i$.

```
procedure HEAP(V, n, i);
begin
  g := V(i); j := 2i;
  while j ≤ n do
    g1 := V(j);
    if j < n then
      g2 := V(j + 1);
      if g1' < g2' then g1 := g2; fi
    fi
    if g' ≥ g1' then
      V(⌊j/2⌋) := g;
      return;
    fi
    V(⌊j/2⌋) := g1; j := 2j;
  od;
  V(⌊j/2⌋) := g;
end.
```

Um die Ableitungen zweier Gegenstände zu vergleichen benötigen wir $O(|M|)$ Operationen, und die Länge $n$ des Indexvektors $V$ ist immer $\leq |G|$. Also hat dieser Algorithmus einen Aufwand von

$$O(\log(|G|) * |M|)$$

Betrachten wir nun den Algorithmus zur Bereinigung der Gegenstandsmenge: Er baut zunächst den Heap $V(1 \ldots n)$ auf. Dadurch kennen wir das größte Element von $G$, dieses speichern wir in der Variablen $g$. Nun wird in einer Schleife jeweils das letzte Element des Vektors $V(i+1)$ an die erste Stelle geschrieben, und der Heap $V(1 \ldots i)$, mit einem Element weniger, neu aufgebaut. (Dazu reicht nun ein Aufruf von HEAP, da die Teilbäume $V(2)$, $V(3)$ noch Heapstruktur besitzen.) Wir erhalten dadurch das nächstgrößere Element $V(1)$, welches wir mit dem vorherigen $g$ vergleichen können.

**A.0.2. Algorithmus.** (GEGENSTANDSBEREINIGEN) Gegeben sei ein klassischer Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$. Der Algorithmus bereinigt die Gegenstandsmenge.

```
begin
  n := |G|;
  for i := 1 to n do V(i) := g_i; od
  for i := ⌊n/2⌋ downto 1 do HEAP(V, n, i); od                Heap aufbauen
```

```
  g := V(1);
  for i := n − 1 downto 1 do
    V(1) := V(i + 1);
    HEAP(V, i, 1);
    h := V(1);
    if g' ≠ h' then <lösche h>;
    else g := h; fi
  od
end.
```

Der Heap wird mit Aufwand $O(|G| * O(\text{Heap})) = O(\log(|G|) * |G| * |M|)$ aufgebaut. Anschließend wird noch $|G|$ mal die Prozedur Heap aufgerufen, also beträgt der Gesamtaufwand

$$O(\log(|G|) * |G| * |M|).$$

Der Algorithmus in [Boe97] benötigte $O(|G|^2 * |M|)$ Operationen.

Bei der Reduzierung des Kontextes ist ebenfalls eine Vorsortierung sinnvoll. Auch wenn sich dadurch die Komplexität des Algorithmus nicht verbessert, so ist unter der Annahme, daß „viele“ Gegenstände reduzierbar sind, eine Beschleunigung zu erwarten. Denn wir vergleichen einen Gegenstand im Algorithmus jeweils nur mit bereits reduzierten Gegenständen.

Der Algorithmus ist komplizierter als A.0.2: Wir müssen nämlich einen zu testenden Gegenstand nicht nur mit dem nächstgrößeren vergleichen, sondern mit allen bereits gefundenen reduzierten Gegenständen. Also müssen wir diese für diesen Zweck zwischenspeichern. Dazu bietet sich das Ende des Vektors $V$ an, da in jedem Durchlauf ein Element in $V$ frei wird. Wir speichern also in jedem Schleifendurchlauf in den Elementen $V(1, \ldots, i)$ einen Heap, der alle noch nicht getesteten Gegenstände enthält, und in $V(j, \ldots, n)$ alle getesteten Gegenstände in sortierter Reihenfolge. Dabei ist stets $j > i$. Wir testen dann $g := V(1)$ auf Reduzibilität, indem wir die Pfeilrelationen (siehe [GaWi96],[Boe97]) nachrechnen, d.h. indem wir für alle $h \in V(j, \ldots, n)$ mit $g' \subseteq h'$ testen, ob es ein $m \in M \setminus g'$ gibt, welches in jedem $h'$ enthalten ist.

**A.0.3. Algorithmus.** (Gegenstandsreduzieren) Gegeben sei ein klassischer Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ mit bereinigter Gegenstandsmenge. Der Algorithmus reduziert dann die Gegenstandsmenge.

```
begin
  n := |G|;
  for i := 1 to n do V(i) := g_i; od
  for i := ⌊n/2⌋ downto 1 do HEAP(V, n, i); od            Heap aufbauen
  j := n + 1;
  for i := n − 1 downto 0 do
```

```
    g := V(1);
    if i > 0 then
      V(1) := V(i+1);
      HEAP(V, i, 1);
    fi
    yes := g';
    no := M \ g';
    for l := j to n do
      if yes ⊆ V(l)' then no = no ∩ V(l)'; fi
    od
    if no = ∅ then <lösche g>;
    else j := j − 1; V(j) := g; fi
  od
end.
```

Der Aufwand des Algorithmus ändert sich nicht im Vergleich zu [Boe97]:

$$O(|G|^2 * |M|),$$

allerdings ist ist eine Geschwindigkeitssteigerung zu erwarten, falls viele Gegenstände reduziert werden.

Natürlich kann man entsprechend auch Algorithmen zu Bereinigung und Reduzierung der Merkmalsmenge formulieren.

Bei der Programmierung stellt sich noch die Frage, wie man das Löschen eines Gegenstandes/Merkmals implementieren möchte. Die schnellste Möglichkeit hierbei ist wahrscheinlich, nicht die Matrizen zu ändern, sondern lediglich Indizes auf die ursprüngliche Inzidenzmatrix anzulegen, und anschließend lediglich Indizes zu löschen. Zusätzlich kann man u.U. Informationen speichern, wie man die Ableitung eines reduzierbaren Gegenstandes gewinnen kann. Ich habe obige Algorithmen in C++ implementiert und dabei auch diese Gesichtspunkte berücksichtigt.

# Anhang B

# Eine Galoisverbindung in der Algebraischen Geometrie

Hüllenoperatoren – und speziell Galoisverbindungen sind in der Mathematik weit verbreitet. Zur Analyse dieser Strukturen eignen sich die Hilfsmittel der Begriffsanalyse – sei es, um den Begriffsverband als Hassediagramm zu zeichnen, oder um den Hüllenoperator durch Implikationen kompakt darstellen zu können.

Als ich im Sommersemester '97 eine Vorlesung von Prof. Dr. Schreyer über algebraische Geometrie hörte ([Schreyer]), war ich überascht, die mir durch diese Arbeit so bekannte Galoisverbindung wiederzuerkennen:

Die algebraische Geometrie beschäftigt sich mit dem Studium der Lösungsmenge algebraischer Gleichungssysteme. Sei dazu für einen Körper $K$

$$\mathbb{A}_K^n := \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in K\}$$

der *$n$-dimensionale affine Raum*. Dann bildet das folgende Paar von Abbildungen eine Galoisverbindung zwischen $\mathfrak{P}(\mathbb{A}_K^n)$ und der Potenzmenge des Polynomrings $\mathfrak{P}(K[x_1, \ldots, x_n])$:

$$V : \mathfrak{P}(K[x_1, \ldots, x_n]) \to \mathfrak{P}(\mathbb{A}_K^n), I \mapsto \{a \in \mathbb{A}_K^n | f(a) = 0, \forall f \in I\}$$
$$I : \mathfrak{P}(\mathbb{A}_K^n) \mapsto \mathfrak{P}(K[x_1, \ldots, x_n]), V \mapsto \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] | f(a) = 0, \forall a \in Y\}$$

Das heißt, $V$ ordnet jeder Menge von Polynomen über $K$ ihre Nullstellenmenge zu, und $I$ ordnet einer Menge von Punkten im affinen Raum die Menge aller Polynome zu, welche in diesen Punkten verschwinden. Die letztgenannte Menge ist ein Ideal, wie man leicht sieht.

Wir können dies also als klassischen Kontext $\mathbb{K} = (G, M, I)$ auffassen, mit der Gegenstands- und Merkmalsmenge:

$$G := \mathbb{A}_K^n \quad \text{und} \quad M := K[x_1, \ldots, x_n]$$

Ein affiner Punkt $a \in \mathbb{A}_K^n$ inzidiert mit einem Polynom $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, falls $a$ Nullstelle von $f$ ist:

$$(a, f) \in I :\Leftrightarrow f(a) = 0$$

Die Begriffsumfänge (das sind gewisse Teilmengen des affinen Raums) heißen *algebraisch*, und im Hilbertschen Nullstellensatz weist man nach, daß die Begriffsinhalte genau die *radikalen Ideale* in $\mathfrak{P}(K[x_1, \ldots, x_n])$ sind. Dabei ist ein *Radikal eines Ideals* $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ wie folgt definiert:

$$\sqrt{I} := \mathrm{rad}(I) := \{f \in R | \exists N \in \mathbb{N} : f^N \in I\}$$

und ein radikales Ideal ist ein $I$ mit $\sqrt{I} = I$.

In der Algebraischen Geometrie betrachtet man weiter speziell die $\vee$-irreduziblen Elemente des Begriffsverbandes: Den Umfang eines $\vee$-irreduziblen Begriffes (eine algebraische Teilmenge) nennt man *irreduzible* algebraische Teilmenge, oder *affine Varietät*. Die zugehörigen Begriffsinhalte sind genau die *Primideal*e. Mit der Tatsache, daß $K[x_1, \ldots, x_n]$ nöthersch ist, kann man nachweisen, daß im Begriffsverband die $\vee$-irreduziblen Elemente $\vee$-dicht sind, und daß die Darstellung eines Begriffs als Supremum $\vee$-irreduzibler Elemente eindeutig ist. Man kann also jede algebraische Menge (Begriffsumfang) eindeutig als Supremum von affinen Varietäten darstellen.

# Literaturverzeichnis


[Bir73] Birkhoff, G.: *Lattice Theory*, third edition. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 25, Providence, R.I. (1973)

[Bly72] Blyth, T.S., Janowitz, M.F.: *Residuation theory.* Pergamon Press, New York (1972)

[Boe97] Boeßenecker, W.: *Computerunterstützte Berechnung von Kontexten und Implikationenbasen.* Diplomarbeit, Uni Bayreuth (1997)

[Bur91] Burmeister, P.: *Merkmalimplikationen bei unvollständigem Wissen.* In: W.Lex, Hrsg, Arbeitstagung Begriffsanalyse und Künstliche Intelligenz. Informatik-Bericht 89/3, TU Clausthal (1991), 15–46

[GaWi89] Ganter, B., Wille, R.: *Conceptual Scaling.* In: Roberts, F., editor, Applications of combinatorics and graph theory to the biological and social sciences. Springer-Verlag, Berlin-Heidelber-New York (1989), 139–167

[GaWi96] Ganter, B., Wille, R.: *Formale Begriffsanalyse – Mathematische Grundlagen.* Springer Verlag, Berlin (1996)

[GuDu86] Guiges, J.-L., Duquenne, V.: *Familles minimales d'implications informatives resultant d'un tableau de données binaires.* Math. Sci. Humaines 95 (1986), 5-18

[HeWe93] Hebisch, U., Weinert, H. J.: *Halbringe.* Teubner, Stuttgart (1993)

[KlYu95] Klir, G., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* Prentice Hall PTR, New Jersey (1995)

[Kerber] Kerber, A.: *Unscharfe Mengen*, Vorlesung Bayreuth (1997)

[KeLe97] Kerber, A., Lex, W.: *Kontexte und ihre Begriffe.* Im Internet: http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/kerber/begriffe.ps (1997)

[Laue] Laue, R.: *Informatik III.* Vorlesung, Bayreuth (1994/95)

[May83] Maier, D.: *The theory of relational data bases.* Computer Science Press, Rockville (1983)

[Schi] Schittkowsky, K.: *Informatik II.* Vorlesung, Bayreuth (1993)

[Schreyer] Schreyer, F.: *Algebraische Geometrie I.* Vorlesung, Bayreuth (1997)

[Tos] *Toscana*, Computerprogramm. Im Internet: http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/˜vogt/software-engl.html

[Um94] Umbreit, S.: *Formale Begriffsanalyse mit unscharfen Begriffen.* Dissertation, Uni Halle (1994)

[Vo96] Vogt, F.: *Formale Begriffsanalyse mit C++: Datenstrukturen und Algorithmen.* Springer-Verlag, Heidelberg (1996)

[We78] Wechsler, W.: *The Concept of Fuzziness in Automata and language Theory.* Akademie-Verlag, Berlin (1978)

# Symbolverzeichnis

| | |
|---|---|
| $(X,\leq)^d$ | dual geordnete Menge zu $(X,\leq)$ |
| $(a]$ | Hauptideal von $a$ |
| $[a)$ | Hauptfilter von $a$ |
| $\bigvee A$ | Supremum von $A$ |
| $\bigwedge A$ | Infimum von $A$ |
| $x \vee y$ | Supremum von $x$ und $y$ |
| $x \wedge y$ | Infimum von $x$ und $y$ |
| $1_V$ | Das größte Element im vollständigen Verband $V$ |
| $0_V$ | Das kleinste Element im vollständigen Verband $V$ |
| $\mathfrak{P}(M)$ | Die Potenzmenge von $M$ |
| $I^{\vee}(V)$ | Die Menge aller $\vee$-irreduziblen Elemente in $V$ |
| $I^{\wedge}(V)$ | Die Menge aller $\wedge$-irreduziblen Elemente in $V$ |
| $\mathfrak{H}_\gamma$ | Menge aller Hüllen des Hüllenoperators $\gamma$ |
| $\gamma_{\mathfrak{H}}$ | Hüllenoperator zum $\wedge$-Unterhalbverband $\mathfrak{H}$ |
| $\varphi^d$ | Die Dualadjungierte zur Galoisabbildung $\varphi$ |
| $x'$ | Ableitung im Kontext $\mathbb{K} = (X, Y, \varphi)$ $(x \in X$ oder $x \in Y)$ |
| $\mathfrak{B}(\mathbb{K})$ | Die Menge aller Begriffe im Kontext $\mathbb{K}$ |
| $\omega_\tau(a,b)$ | Konjunktion mit der t-Norm $\tau$ |
| $[A]$ | Quasiwahrheitswert einer logischen Aussage $A$ |
| $[\mathcal{A} \subseteq_L \mathcal{B}]$ | Quasiwahrheitswert der Aussage „$\mathcal{A}$ ist Teilmenge von $\mathcal{B}$“ |
| $\mathfrak{P}_L(X)$ | Die $L$-Fuzzy-Potenzmenge zu $X$ |
| $T(\mathcal{A})$ | Der Träger einer $L$-Fuzzy-Menge $\mathcal{A}$ |
| $\mathrm{IR}_{G,M}(\varphi)$ | Inzidenzrelation zur Galoisabbildung $\varphi$ (auf $G \times M$) |
| $\mathrm{GA}_{X,Y}(I)$ | Galoisabbildung zur Inzidenzrelation $I$ (zwischen $X$ und $Y$) |

| | |
|---|---|
| $m \neq \delta$ | $\vee$-irreduzible Beschreibung in einem mehrwertigen Kontext (bildet $m$ auf $W$ ab) |
| $m \neq w$ | $\vee$-irreduzible Beschreibung in einem mehrwertigen Kontext (bildet $m$ auf $W \setminus \{w\}$ ab) |
| $\mathfrak{H}_{\mathfrak{I}}$ | Menge der Elemente, welche alle Implikationen aus der Implikationenmenge $\mathfrak{I}$ respektieren |
| $\gamma_{\mathfrak{I}}$ | Hüllenoperator zur Implikationenmenge $\mathfrak{I}$ |
| $\mathfrak{I}_\gamma$ | Menge der Implikationen zum Hüllenoperator $\gamma$ |
| $\mathfrak{I}^+$ | Abschluß einer Implikationenmenge $\mathfrak{I}$ |
| $\mathfrak{I}(\mathbb{K})$ | Menge aller Implikationen, die im Kontext $\mathbb{K}$ gelten |
| $\mathfrak{P}_\gamma$ | Menge aller Hüllen und Pseudohüllen zum Hüllenoperator $\gamma$ |

# Index

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Diplomarbeit selbst verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Bayreuth, 7. April 1998

(Ralf Gugisch)