Prof. Dr. A. Kerber Wintersemester 2005/06

Codierungstheorie II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es gibt drei Typen von elementaren $k \times k$-Matrizen über $GF(q)$. Für $\lambda \in GF(q)^*$ und $i_0, j_0 \in k$ mit $i_0 \neq j_0$ sind sie gegeben via:

- $B^{(1)}_{i_0,\lambda}$ unterscheidet sich von der Einheitsmatrix I_k nur durch den Eintrag λ (statt 1) in i_0-ter Zeile und i_0-ter Spalte, d.h. $B^{(1)}_{i_0,\lambda} = (b_{i,j})_{i,j\in k}$ mit
$$b_{i,j} = \begin{cases} \lambda & \text{falls } i = j = i_0 \\ 1 & \text{falls } i = j \neq i_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- $B^{(2)}_{i_0,j_0,\lambda}$ unterscheidet sich von der Einheitsmatrix I_k nur durch einen Eintrag λ (statt 0) an der Stelle (i_0, j_0), d.h. $B^{(2)}_{i_0,j_0,\lambda} = (b_{i,j})_{i,j\in k}$ mit
$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ \lambda & \text{falls } i = i_0 \text{ und } j = j_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- $B^{(3)}_{i_0,j_0}$ geht aus I_k durch Vertauschen von i-ter und j-ter Zeile (und Spalte) hervor, d.h. $B^{(3)}_{i_0,j_0} = (b_{i,j})_{i,j\in k}$ mit
$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ und } i \neq i_0, i \neq j_0 \\ 1 & \text{falls } (i,j) = (i_0,j_0) \text{ oder } (i,j) = (j_0,i_0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass alle diese Matrizen regulär sind und dass deren Inverse wieder elementare Matrizen sind. Weiter bilden die elementaren Matrizen ein Erzeugendensystem der $GL_k(q)$. *(Hinweis:* Vergleiche mit Gaussalgorithmus!)

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei G endliche Gruppe und X endliche Menge, auf der G operiert. G sei durch eine Menge von Generatoren gegeben: $G = \langle g_0, \ldots, g_{r-1}\rangle$. Zeigen Sie, dass man wie folgt die Bahn Gx eines $x \in X$ bestimmen kann: Setze
$$\Omega_0 := \emptyset, \qquad \Omega_1 := \{x\} \quad \text{und für } i \geq 2: \quad \Omega_i := \Omega_{i-1} \cup \bigcup_{j\in r} g_j(\Omega_{i-1} \setminus \Omega_{i-2}),$$
Dann gilt für das kleinste i mit $\Omega_i = \Omega_{i-1}$: $G(x) = \Omega_i$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Machen Sie sich den Zusammenhang zwischen linearen Relationen auf Familien von Vektoren (Abschnitt 6.2 im Buchmanuskript) und den Slepiangraphen klar. Beweisen Sie den ersten Teil von Lemma 6.2.4.

Abgabe: Montag, den 28.11.2005, 10:00 Uhr im Raum 3.2.O2.737