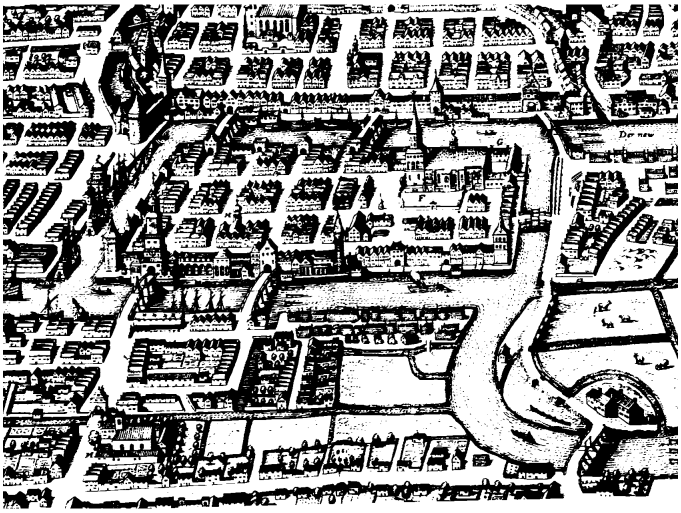
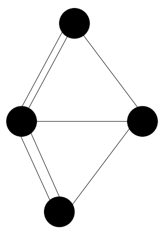
KAPITEL 3

Graphen

Man kann als Ursprung der Graphentheorie ein Problem sehen, welches Euler 1736 von Studenten aus Königsberg gestellt bekam. Der Fluss Pregel wird von 7 Brücken überquert, und die Frage war ob man einen Spaziergang so anlegen kann, dass jede Brücke genau einmal benutzt wird. Natürlich will man am Ende wieder daheim sein.



Dieses Problem wird durch folgenden Graph modelliert:



Ein Graph G ist dabei ein $2-$Tupel (V, E) aus Knotenmenge V und Kantenmenge E. Die Kantenmenge besteht aus $2-$elementigen Teilmengen von V. In unserem Fall sind beide endlich. Solche Graphen heißen *schlichte* Graphen. Es sind keine Scheifen möglich (es würde sonst die Teilmenge $\{v, v\}$ nötig) und es sind auch keine Mehrfachkanten möglich (sonst müsste eine Teilmenge in E mehrfach vorkommen). Um obiges Problem zu modellieren brauch wir Mehrfachkanten, dann ist E eine sog. Multimenge. Obiger Graph ist dann folgendes $2-$Tupel:

$$(\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}\}).$$

Schlichte Graphen kann man auch als binäre symmetrische, irreflexive Relation über V definieren. Die zugehörige Matrix in obigen Königsberger Beispiel wäre:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man betrachtet auch gerichtete Graphen, die Kantenmenge besteht dann aus $2-$Tupeln aus $V \times V$. Ohne Mehrfachkanten und Schleifen ist dies ist auch wieder eine binäre irreflexive Relation über V.

Im folgenden Kapitel wird das *Königsberger Brückenproblem* gelöst:

3.1. Euler Tour

Wir betrachten nun schlichte Graphen. Man sieht sofort ein, dass man sich auf zusammenhängende Graphen beschränken kann. Um dies formal zu definieren führen wir einen *Pfad* (der Länge k) ein, dies ist eine Menge $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ von Knoten mit der Eigenschaft, dass es jeweils eine verbindende Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ gibt. Dabei heisst dann v_1 Startkonten und v_{k+1}Endknoten. Ein *Kreis* ist dann ein Pfad mit gleichen Anfang und Endknoten. Ein Graph ist *zusammenhängend* wenn es für all Paare (u, v) von Knoten einen Pfad gibt mit u als Startknoten und v als Endknoten. Um festzustellen ob ein Graph zusammenhängend ist kann man folgenden kleinen Algorithmus verwenden:

ALGORITHM 3.1.1. *Zusammenhängend?*

input: Graph (V, E)

output:ja falls zusammenhängend

Starte mit einen beliebigen Knoten v*, einer Knotenmenge* $S := \{v\}$*, und einem Vektor* $besucht(x)$ $(x \in V)$*der zu Anfang überall den Eintrag* 0 *hat.*

Solange $S \neq \emptyset$*mache*

{

entferne einen Knoten w *aus* S*, setze* $besucht(w) := 1$*,*

für alle Kanten ws *füge* s *zu* S *falls* $besucht(s) = 0$.

}

gebe ja zurück falls $besucht$ *überall den Eintrag* 1 *hat.*

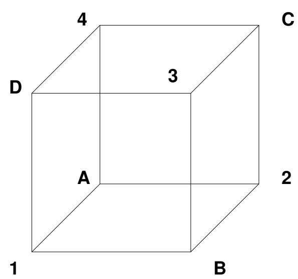
LEMMA 3.1.2. *Zusammenhangskomponente*

Die Eigenschaft 'es gibt einen Pfad zwischen x *und* y*' ist eine Äquivalenzrelation auf* V*.*

BEWEIS. nachrechnen □

Die Äquivalenzklassen (als Teilgraphen) nennt man *Zusammenhangskomponenten* von G.

EXAMPLE 3.1.3. Der Würfel



Wir beginnen am Knoten D, d.h. im ersten Schritt ist $S = \{D\}$ und alle besucht Einträge sind 0. In der ersten Schleife wird der Knoten D aus S herausgenommen und $besucht(D) = 1$. In die Menge S wandern die noch nicht besuchten (d.h. $besucht = 0$) Knoten $1, 3, 4$. Nun wird ein Knoten aus S entfernt, sagen wir der Knoten 4. Tabellarisch schaut dies wie folgt aus:

S	Knoten	besucht
		$(A, B, C, D, 1, 2, 3, 4)$
D	D	$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
$1, 3, 4$	4	$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$
$C, A, 1, 3$	3	$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$
$B, C, A, 1$	1	$(0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$
B, C, A	A	$(1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$
$2, B, C$	C	$(1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$
$2, B$	B	$(1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$
2	2	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

un damit ist die Menge S leer, der Algorithmus stoppt und das der $besucht$ Vektor nur Einsen enthält ist der Graph zusammenhängend.

Um das Ergebnis von Euler zu formulieren benötigen wir den Begriff des Knotengrads: Der *Knotengrad* eines Knotens v (auch *Valenz* genannt) ist die Anzahl der Kanten an diesem Knoten und wird mit $d(v)$ (degree) bezeichnet. Nun die Lösung von Euler (ihm zu Ehren wird ein solcher Pfad, der zurück zum Startpunkt führt und alle Kanten genau einmal enthält *Euler Tour* genannt, und ein Graph, der eine Euler Tour zulässt wird *Eulersch* genannt.)

THEOREM 3.1.4. [EULER] *1736*

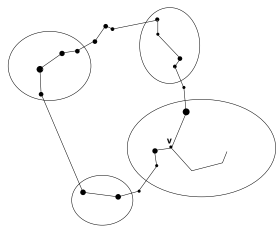
Ein zusammenhängender Graph G is Eulersch genau dann wenn alle Knotengrade gerade sind.

BEWEIS. " $\Rightarrow$ "

Sei G Eulersch, und sei C eine Euler Tour mit Start = Endknoten u. Bei jedem Knoten $v \neq u$ wird die Valenz um 2 (es sind zwei Kanten) erhöht wenn v auf dem Pfad liegt. Da die Euler Tour alle Kanten enthält kommt am Ende $d(v)$ für jeden Knoten heraus, und da es in 2er Schritten zustande kam ist es gerade für alle $v \neq u$. Der Knoten u liefert $1 + 1$ für Anfang und Ende der Tour, so ist auch u von gerader Valenz.

" $\Leftarrow$ "

Sei nun G ein zusammenhängender nicht-Eulergraph ohne Knoten von ungerader Valenz. Sei G Kanten-minimal mit dieser Eigenschaft. Also haben alle Knoten Valenz ≥ 2, dann gibt es aber einen Kreis in G.(dies ist ein kleiner Hilfssatz) Nun nehmen wir einen maximalen Kreis C in G. Betrachte nun den Graphen $G' := G \setminus E(C)$. ($E(C)$ bezeichnet die Kanten aus C) Da C keine Euler Tour ist, müssen noch Kanten übrig sein. Alle Knoten haben gerade Valenz und der Graph zerfällt in eventuell kleinere Zusammenhangskomponenten, die aus Knoten mit gerader Valenz bestehen und da sie weniger Kanten haben sind diese Komponenten nach Annahme alle Eulersch. Nun bastelt man einen großen Eulerpfad durch Verbinden der Pfade in den Zusammenhangskomponenten mittels Kreis C.



□

Dies lässt sich auf Multigraphen und auch auf gerichtete Graphen verallgemeinern.

Falls es nur zwei Knoten mit ungeraden Grad gibt kann man den einen als Startknoten der Euler Tour wählen, und findet dann einen Weg über alle Kanten zum zweiten Knoten von ungeraden Grad. Damit ist auch geklärt ob das 'Haus vom Nikolaus' in einem Zug gezeichnet werden kann. Die Situation, dass es nur einen Knoten von ungeraden Grad gibt kann nicht sein:

LEMMA 3.1.5. *Die Anzahl der Knoten von ungeraden Grad ist gerade. ('Handshaking Lemma')*

BEWEIS. Die Summe über alle Valenzen ist $2 \times |E|$ also gerade. □

Es stellt sich noch die Frage wie finde ich eine Euler Tour. Natürlich kann man die Idee aus dem Beweis nehmen und mit einer rekursiven Routine dann eine Euler Tour für den Graphen konstruieren. Es gibt aber auch die Möglichkeit direkt zu entscheiden welche Kante als nächste genommen werden soll. Dies ist der Algorithmus von *Fleury*:

INPUT	EC1	Eulerscher Multigraph G
INIT	EC2	wähle Startknoten v
		Euler Tour $C := v$
SCAN	EC3	für alle Kanten vx am Knoten v
CHOOSE AN EDGE	EC4	Falls möglich wähle eine Kante vx sodass G nicht zerfällt
		ansonsten eine andere Kante vx
REMOVE THE EDGE	EC5	entferne vx aus G und alle Knoten vom Grad 0
		$C := C, vx, x$ und $v := x$
LOOP?	EC6	falls es noch Kanten gibt goto EC3
OUTPUT	EC7	Euler Tour C

Es wird als nächste Kante versucht eine zu nehmen die den restlichen Graph nicht in zwei Komponenten zerlegt. Aus verständlichen Gründen werden solche Kanten Brücken genannt.

DEFINITION 3.1.6. Brücke

Eine Kante e in einem Graph G heißt *Brücke*, wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in G ohne e höher ist als in G.

Das zu Euler äquivalente Problem:

"Wir suchen einen Weg der jeden Knoten genau einmal besucht".

ist viel schwieriger zu lösen. Dies ist die Frage nach einem *Hamilton'schen Kreis* und für diese Frage gibt es bis heute keine Aussage der Art:

$$\text{Hamilton'sch} \iff \ldots\ldots$$

Es gibt nur einige hinreichende Bedingungen, die im Prinzip sagen, wenn es genug Kanten gibt, dann ist der Graph Hamilton'sch.