1.4. Relationen

Rene Descartes (31.3.1596 - 11.2.1650)

Das *kartesische Produkt* (benannt nach Descartes) zweier Mengen M und N ist die definiert als die Menge aller geordeneten Paare wobei der erste Eintrag aus M und der zweite aus N ist, dies wird mit $M \times N$ bezeichnet. Formal:

$$M \times N := \{(m, n) : m \in M \text{ und } n \in N\}.$$

Das geht auch allgemeiner:

$$M_1 \times \ldots \times M_r := \{(m_1, \ldots, m_r) : m_i \in M_i \text{ für alle } i \text{ mit } 1 \leq i \leq r\},$$

das ist ein $r-$faches kartesisches Produkt.

LEMMA 1.4.1. *Kardinalität bei endlichen Mengen*

$$|M_1 \times \ldots \times M_r| = |M_1| \times \ldots \times |M_r|$$

Eine ($r-$stellige) *Relation* R über $(M_1, \ldots, M_r)$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $M_1 \times \ldots \times M_r$.

EXAMPLE 1.4.2. Verbindung zu Datenbanken

Eine Teilmenge aus $Autor \times Titel \times ISBN \times Preis$ ist eine $4-$stellige Relation, ein Element wäre

$$(Dan\,Brown, Diabolus, 3785721943, 19.90).$$

Diese Sichtweise ist Grundlage der Theorie der relationalen Datenbanken.

Im weiteren beschränken wir uns auf $2-$stellige Relationen, und nennen diese einfach Relationen.

EXAMPLE 1.4.3. wichtig

Betrachte die Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, deren erste Komponente echt kleiner ist als die zweite Komponente:

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \text{ ist kleiner als } y\}.$$

Man kann dies in einer Tabelle visualisieren:

$y \backslash x$	0	1	2	3	$\ldots$
0					
1	x				
2	x	x			
3	x	x	x		
4	x	x	x	x	
$\vdots$					

wobei diese offenbar unendliche Dimension haben muss. Oder aber auch direkt als $0-1$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Dieses Beispiel erklärt auch warum man gerne xRy anstelle vom $(x, y) \in R$ schreibt da man dieses Paar (x, y) so interpretiert, dass x mit y in einer Relation R steht. In diesem Beispiel verwendet man dann das übliche Symbol $<$ anstelle von R.

Zu jeder Relation R über (X, Y) gibt es eine *inverse* Relation R^{-1}, die man erhält indem man definiert

$$(x, y) \in R^{-1} \text{ falls } (y, x) \in R.$$

Betrachtet man die $0-1$-Matrix, so erhält man die inverse Relation durch Transponieren (=Spiegeln an der Diagonale). Die inverse Relation ist dann eine Relation über (Y, X). Gegeben zwei Relationen R über (X, Y) und eine Relation S über (Y, Z), so definiert man eine *Komposition* von R und S, dies ist eine Relation über (X, Z) sie wird mit $S \circ R$ bezeichnet und ein Tupel (x, z) ist enthalten falls es ein $y \in Y$ gibt mit xRy und ySz. Dieses y muss dabei nicht eindeutig sein.

EXAMPLE 1.4.4. Relationen

Länder stehen miteinander in Relation, wenn sie eine gemeinsame Grenze haben.

$$(Deutschland, Frankreich) \in R$$

Zahl x steht mit der Zahl y in Relation, falls y von x geteilt wird.

$$(2, 10) \in R$$

Der Graph einer Funktion $f : X \to Y$ definiert eine Relation $R \subset X \times Y$ durch die Regel

$$(x, f(x)) \in R$$

Häufig betrachtet man Relationen über X, dies ist dann eine Teilmenge $R \subset X \times X$.

DEFINITION 1.4.5. Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation über X. Dann definiert man:

R ist *reflexiv*, falls xRx (für alle $x \in X$), ist R nicht reflexiv, so heisst R *irreflexiv*.

R ist *symmetrisch*, falls (für alle $x, y \in X$) aus xRy auch yRx folgt.

R ist *schwach antisymmetrisch*, falls (für alle $x, y \in X$) aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt.

R ist *antisymmetrisch*, falls (für alle $x, y \in X$) aus xRy folgt, dass yRx nicht gilt.

R ist *transitiv*, falls (für alle $x, y, z \in X$) aus xRy und yRz auch xRz folgt.

EXAMPLE 1.4.6. Eigenschaften der obigen Beispiele

Von den obigen Beispielen waren $\{<$,Ländergrenzen, Teiler$\}$ Relationen über einer einzigen Grundmenge. Betrachten wir die Eigenschaften dieser 3 Relationen

	reflexiv	symmetrisch	s.a.	anti-s.	transitiv
Teiler	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$<$	$-$	$-$	$?$	$+$	$+$
Länder	$?$	$+$	$-$	$-$	$-$

1.4.1. Äquivalenzrelation. Eine Relation R über X heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Eine Äquivalenzrelation definiert automatisch eine Zerlegung von X in Teilmengen, den sog. *Äquivalenzklassen*. Die Klassen werden gebildet durch die Elemente aus X die zueinander äquivalent sind.

EXAMPLE 1.4.7. Äquivalenzrelation
Beispiel einer Äquivalenzrelation R auf der Menge B aller Bewohner von Bayreuth.

$$R := \{(x, y) : x \text{ und } y \text{ haben gleiches Geburtsjahr } \}$$

Dies definiert eine Zerlegung von B in Teilmengen die beschrieben werden durch das Geburtsjahr. (Vergröberung eines Problems)

Umgekehrt kann man zu jeder Zerlegung (nach Definition disjunkt) einer Menge X in Teilmengen eine Äquivalenzrelation definieren, zwei Elemente aus X sind äquivalent, falls sie in der gleichen Teilmenge liegen.