1.3. Binomialkoeffizienten

Blaise Pascal (19.6.1623 - 19.11.1662):

LEMMA 1.3.1. *Anzahl von Teilmengen*

Sei M eine endliche Menge der Kardinalität (Ordnung) m. Die Anzahl der verschiedenen $k-$elementigen ($k \leq m$) Teilmengen von M ist:

$$\frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

BEWEIS. Man betrachtet alle Folgen aus k paarweise verschiedenen Elementen. Dies sind alle möglichen Auflistungen von $k-$elementigen Teilmengen. Dazu hat man $m \cdot (m-1)\cdots(m-(k-1))$ Möglichkeiten, nämlich m Möglichkeiten für das erste Folgeglied, die übrigen $(m-1)$ Möglichkeiten für das zweite Folgeglied und jeweils jedes noch nicht verbrauchte Element für die nächste Stelle. Jede mögliche $k-$elementige Teilmenge kommt dabei genau $k!$ mal vor. Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen ist also $\frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-(k-1))}{k!}$. □

Da diese Anzahl sehr häufig vorkommt wird sie mit einem eigenen Symbol bezeichnet:

$$\binom{m}{k}.$$

Man beachte auch den Grenzfall:

$$\binom{m}{0} = 1.$$

Diese Zahlen heißen *Binomialkoeffizienten*, da sie auch an der folgenden Stelle auftauchen:

LEMMA 1.3.2. *Binomialsatz*

$$(x+y)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k y^{m-k}.$$

BEWEIS. Es sind m Faktoren $F_i = (x+y)$, die multipliziert werden. Ein Summand $x^k y^{m-k}$ entsteht, wenn genau k mal ein x ausgewählt wird. Die Indizes der Faktoren, bei denen das x ausgewählt wurde bilden dann gerade eine $k-$elementige Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, m\}$. □

Direkt aus der numerischen Formel hat man:

LEMMA 1.3.3. *Symmetrie der Binomialkoeffizienten*

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}.$$

Die wichtigste Eigenschaft (theoretisch und praktisch) der Binomialkoeffizienten ist folgende Rekursion

THEOREM 1.3.4. *Rekursion für Binomialkoeffizienten*
Seien $m, k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq m$, dann gilt

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}.$$

BEWEIS. Wir beweisen dies auf zwei Arten, theoretisch und praktisch.
theoretisch: Wir formen die linke Seite, deren numerischen Wert wir nach 1.3.1 kennen, um:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m \times (m-1)!}{k \times (k-1)! \times (m-k) \times (m-k-1)!} =$$
$$\frac{(m-1)!}{(k-1)! \times (m-k-1)!} \times \frac{m}{k \times (m-k)} =$$
$$\frac{(m-1)!}{(k-1)! \times (m-k-1)!} \times \left(\frac{m-k}{k \times (m-k)} + \frac{k}{k \times (m-k)} \right)$$
$$= \frac{(m-1)!}{(k-1)! \times (m-k-1)!} \times \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{m-k} \right) =$$
$$\frac{(m-1)!}{k \times (k-1)! \times (m-k-1)!} + \frac{(m-1)!}{(k-1)! \times (m-k) \times (m-k-1)!} =$$
$$\frac{(m-1)!}{k! \times (m-k-1)!} + \frac{(m-1)!}{(k-1)! \times (m-k)!} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}.$$

praktisch: Hier verwenden wir die zugrunde liegenden Mengen: Eine $k-$elementige Teilmenge einer $m-$elementigen Grundmenge (sagen wir $\{1, \ldots, m\}$) kann gebildet werden, entweder indem man die 1 nimmt und diese mit einer $(k-1)-$elementigen Teilmenge von $\{2, 3, \ldots, m\}$ ergänzt (dann ist das eine $k-$elementige Teilmenge mit 1) oder aber indem man eine $k-$elementige Teilmenge von $\{2, 3, \ldots, m\}$ nimmt (dann ist das eine $k-$elementige Teilmenge ohne 1). □

Diese Rekursion ist Grundlage des sog. *Pascalschen Dreiecks*.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1 \\
1\ 2\ 1 \\
1\ 3\ 3\ 1 \\
1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\
1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \\
1\ 6\ 15\ 20\ 15\ 6\ 1 \\
1\ 7\ 21\ 35\ 35\ 21\ 7\ 1 \\
\ldots
\end{array}
$$

Hier werden innerhalb der Zeile Binomialkoeffizienten $\binom{m}{k}$ mit gleichem m angeordnet, direkt darüber stehen die beiden Koeffizienten aus der Rekursion. So ergibt diese Anordnung, dass ein Eintrag die Summe der beiden darüber stehenden Einträge ist. Dies war schon lange vor Pascal (1653) bekannt.

LEMMA 1.3.5. *Eigenschaften der Binomialkoeffizienten*

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n \geq 0)$$

$$\sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i+1} (n \geq 1)$$

$$\sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{2i} = 2^{n-1} (n \geq 1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n} (n \geq 0)$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} (n \geq 0)$$

BEWEIS. Übung □

1.3.1. Multinomialkoeffizienten. Eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind die *Multinominalkoeffizienten*, man bestimmt damit die Anzahl der Möglichkeiten eine $m-$elementige Menge M in Teilmengen $K_1, \ldots, K_r$ der jeweiligen Kardinalität $k_1, \ldots, k_r$ zu zerlegen. *Zerlegung* bedeutet dabei, dass $K_1 \cup \ldots \cup K_r = M$ und die Mengen K_i sind paarweise disjunkt, also $k_1 + \ \ldots + k_r = m$. Dieser Multinomialkoeffizient wird mit

$$\binom{m}{k_1, \ldots, k_r}$$

bezeichnet. Es gilt

LEMMA 1.3.6. *Wert des Multinomialkoeffizienten*

$$\binom{m}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{m!}{k_1! \times \ldots \times k_r!}$$

BEWEIS. Wie beim Beweis des Binomialkoeffizienten als Anzahl der Teilmengen. Betrachte alle möglichen Auflistungen der Teilmengen. Dividieren durch die Auflistungen, die gleiche Mengen liefern. □

Der Binomialkoeffizient liefert die Anzahl der Zerlegungen in eine $k-$elementige Teilmenge und das Komplement, also

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{k, m-k}.$$

Der Name erklärt sich wieder durch folgende Formel, die auch wieder analog zum Binomialkoeffizienten bewiesen wird:

LEMMA 1.3.7. *Multinomial-Satz*

$$(x_1 + \ldots + x_r)^m = \sum_{k_1 + \ldots + k_r = m} \binom{m}{k_1, \ldots, k_r} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$$

EXAMPLE 1.3.8. Anwendung Multinomialkoeffizienten
Ein beliebtes Beispiel ist die Frage auf wieviel verschiedene Weisen die Buchstaben aus

$$MISSISSIPPI$$

angeordnet werden können. Die Antwort ist

$$\binom{11}{1,4,4,2}.$$

Die Teilmengen sind gerade die M's (1 Element), I's (4 Elemente), S's (4 Elemente) und P's (2 Elemente).