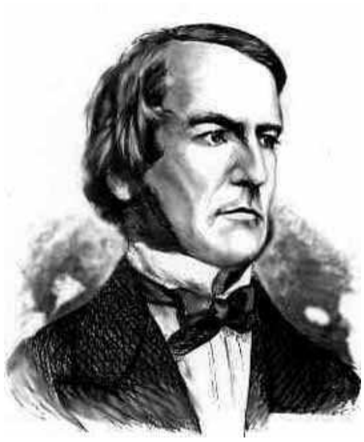
5.4. Boolesche Algebra



George Boole (2.11.1815 - 8.12.1864)

Das Konzept der Booleschen Algebra erhält man durch Abstraktion von der konkreten Situation (Logik, Teilmengen) und Konzentration auf das 'Wesentliche', die Eigenschaft der vorhandenen Verküpfungen. (George Boole in 1854) .

DEFINITION 5.4.1. Eine Menge B mit 3 Abbildungen

$$\begin{array}{rcccl} +: & B & \times & B & \rightarrow & B \\ \star: & B & \times & B & \rightarrow & B \\ \overline{\ }: & & & B & \rightarrow & B \end{array}$$

(kurz: $(B,+,\star,\overline{\ })$)heisst *Boolesche Algebra* wenn folgende 5 Eigenschaften für $x,y,z \in B$ gelten:

(1) $x+y=y+x$ und $x\star y=y\star x$ (kommutativ)
(2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ und $x\star(y\star z)=(x\star(y\star z))$ (assoziativ)
(3) $x\star(y+z)=(x\star y)+(x\star z)$ und $x+(y\star z)=(x+y)\star(x+z)$ (distributiv)
(4) $(x+y)\star x=x$ und $(x\star y)+x=x$
(5) $x+(y\star\overline{y})=x$ und $x\star(y+\overline{y})=x$

Beispiele für Boolesche Algebra:

- Die Teilmengen einer Menge X. Dabei ist $+$ die Vereinigung, $\star$ist der Schnitt und $\overline{\ }$ ist das Komplement.
- Die n-stelligen Booleschen Funktionen aus dem Schaltkreisentwurf.
- Die Aussagenlogik mit: und,oder,Negation.

Die definierenden Eigenschaften wurden so gruppiert, dass man durch Vertauschen von $\star$ und $+$ die zweite definierende Eigenschaft bekommt, d.h. ist $(B,+,\star,\overline{\ })$ eine Boolesche Algebra, dann ist auch $(B,\star,+,\overline{\ })$ eine Boolesche Algebra. Dies ist das sog. *Dualitätsprinzip*.

LEMMA 5.4.2. *Existenz von* 0 *und* 1

In jeder Booleschen Algebra B *gibt es ein Element* 0_B *und eine Element* 1_B *sodass für alle* $x \in B$ *gilt:*

$x\star\overline{x}=0_B$

$x+\overline{x}=1_B$

BEWEIS. Wegen Eigenschaft 5 gilt für $x,y\in B$: $x\star\overline{x}=x\star\overline{x}+y\star\overline{y}=y\star\overline{y}$. Damit ist klar dass dies ein eindeutiges Element ist, was dann mit 0_B bezeichnet wird. Mit der 1 geht dies analog. □

Da eine Boolesche Algebra auch ein Verband ist (der Teilmengenverband) haben wir hiermit die Existenz des Maximums und Minimums auch für den unendlichen Fall nachgewiesen.

LEMMA 5.4.3. *Idempotenz der Booleschen Verknüpfungen*
Sei B eine Boolesche Algebra, dann gilt für alle $x \in B$:
$x + x = x$
$x \star x = x$
$\overline{\overline{x}} = x$

BEWEIS. Mit (von links nach rechts) B4,B3 und B5:
$x = x + (x \star \overline{x}) = (x + x) \star (x + \overline{x}) = x + x$.
Die Idempotenz des $\star$ Operators folgt analog (Dualitätsprinzip). Für die Idempotenz des Komplements kann man wie folgt vorgehen: Aus

$$x =_{B5} x \star (\overline{x} + \overline{\overline{x}}) = x \star \overline{x} + x \star \overline{\overline{x}} =_{B5} x \star \overline{\overline{x}}$$

erhält man

$$x + \overline{\overline{x}} = x \star \overline{\overline{x}} + \overline{\overline{x}} =_{B4} \overline{\overline{x}}.$$

Damit kann man die Idempotenz wie folgt zeigen:
$\overline{\overline{x}} = x + \overline{\overline{x}} =_{B5} (x + \overline{\overline{x}}) \star (x + \overline{x}) = x \ \star x + x \star \overline{x} + \overline{\overline{x}} \star x + \overline{\overline{x}} \star \overline{x} = x + 0 + \overline{\overline{x}} \star x + 0$
was zum einfacheren Ausdruck wird der sich mit obigen Ergebnis zusammenfassen lässt:

$$= x + \overline{\overline{x}} \star x = x + x = x.$$

□

Um den nachfolgenden wichtigen Satz zu zeigen ist folgende Kürzungsregel nützlich:

LEMMA 5.4.4. *Kürzen in der Booleschen Algebra*
Sei B eine Boolesche Algebra, dann gilt für $x, y, z \in B$:

$$(x + y = x + z) \wedge (x \star y = x \star z) \Rightarrow y = z$$

BEWEIS. y= $(B4)$ = y+x⋆y= $(B3)$ =(y+x)⋆(y+y)=(z+x)⋆(y+y)=(z+x)⋆y= $(B3)$ =$(z \star y)$ + $(x \star y)$=$(z \star y)$ + $(x \star z)$=$(x + y) \star z$=$(x + z) \star z$=z □

Der folgende Satz wurde von De Morgan (1806-1871) gefunden:

THEOREM 5.4.5. [DE MORGAN]
Sei B eine Boolesche Algebra dann gilt für alle $x, y \in B$:

$$\overline{x \star y} = \overline{x} + \overline{y} \text{ und } \overline{x + y} = \overline{x} \star \overline{y}$$

BEWEIS. Zuerst wird die erste Eigenschaft gezeigt.Es wird obige Kürzungsregel verwendet. Wir müssen die Gleichheit der beiden Formeln unter Addition und Multiplikation eines geeigneten Elements aus B zeigen. Aus der Definition der 1 wissen wir:

$$x \star y + \overline{x \star y} = 1$$

andrerseits:
x⋆y+$(\overline{x}$+$\overline{y})$ = $(x$+$\overline{x}$+$\overline{y})$⋆$(y$+$\overline{x}$+$\overline{y})$ = $(1$+$\overline{y})$⋆$(1$+$\overline{x})$ = $(y$+$\overline{y}$+$\overline{y})$⋆$(x$+$\overline{x}$+$\overline{x})$ = 1⋆1 = 1

Damit ist der Additionsteil (das zu kürzende Element ist $x \star y$) für der Kürzungsregel geschafft, jetzt der Multiplikationsteil:
Von der Definition der 0:

$$(x \star y) \star \overline{x \star y} = 0$$

andrerseits:

$x\star y\star(\overline{x}+\overline{y}) = (x\star\overline{x}\star y)+(y\star x\star\overline{y}) = (0\star y)+(0\star x) = (y\star\overline{y}\star y)+(x\star\overline{x}\star x) = 0+0 = 0$

und nun liefert die Kürzungsregel:

$$\overline{x \star y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Den zweiten Teil kann man mit dem Dualitätsprinzip erledigen. $\square$