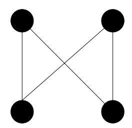
4.4. Verband

Man interessiert sich nun für einen Unterschied zwischen den beiden Beispielen Teilmengen poset und Teiler poset. Dazu definiert man: Eine *obere Schranke* für eine Teilmenge $X \subset P$ ist ein Element y mit xRy für alle $x \in X$.Eine kleinste obere Schranke (unter allen oberen Schranken muss es ein Minimum geben) heisst *Supremum*. Analog definiert man *untere Schranke* und *Infimum*. Beim Teiler poset haben z.B. 10 und 7 keine gemeinsame obere Schranken, wohingegen beim Teilmengen poset es stets einSupremum (=Vereinigung) und ein Infimum (=Schnitt) gibt. Dies motiviert folgende Definition: Ein poset P heisst *Verband*, wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in P$ stets ein Infimum und ein Supremum gibt. Das Infimum von x und y wird dann üblicherweise mit $x \wedge y$ und das Supremum mit $x \vee y$ bezeichnet. Die Verwendung dieser Symbole erklärt sich durch das Teilmengen Beispiel.

EXAMPLE. kein Verband, weil kleinste obere Schranke nicht eindeutig (auch grösste untere Schranke nicht eindeutig)



Für die beiden Operatoren $\vee, \wedge$ gelten dann folgende Eigenschaften:

LEMMA 4.4.1. *Seien $x, y, z \in P$.*

(1) *$\wedge$ und $\vee$ sind associative und kommutativ.*
(2) *$\wedge$ und $\vee$ sind idempotent, d.h. $x \vee x = x \wedge x = x$*
(3) *$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ (Absorptionsgesetz)*
(4) *$x \wedge y = x \iff x \vee y = y \iff x \leq y$*
(5) *$x \leq z$ und $y \leq z \Rightarrow x \vee y \leq z$*
(6) *$x \geq z$ und $y \geq z \Rightarrow x \wedge y \geq z$*
(7) *P endlich $\Rightarrow$es existiert ein Maximum und ein Minimum*

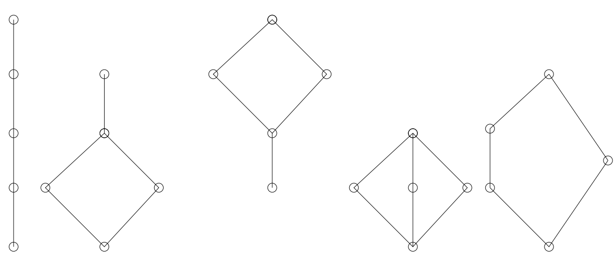
BEWEIS. nachrechnen □

Man kann auch umgekehrt vorgehen, dazu startet man mit einer Menge X und zwei Operationen $\vee, \wedge$ (= Tupel $(X, \wedge, \vee)$)mit den obigen Eigenschaften (kommutativ, assoziativ, idempotent,absorpierend). Man definiert dann über die Eigenschaft $4)$ eine Halbordnung.

EXAMPLE. Definition eines Verbandes

Betrachte die Menge der Teiler von 120. Die Teilordnung ist die Teiler-relation. Dies ist ein Verband. Als Verbandsoperationen erhält man dann $\vee$ =kgV und $\wedge$ =ggt.

Die Eigenschaft Verband ist eine wirkliche Einschränkung, so gibt es nur 5 verschiedene Verbände mit 5 Elementen:



im Gegensatz zu 63 verschiedenen Posets mit 5 Elementen.

Die Verbandseigenschaft einer eindeutigen kleinsten oberen Schranke ist z.B. nützlich im Zusammenhang mit objektorientierten Sprachen, in diesem Fall ist klar wenn zum Berechnen einer Operation ein bester gemeinsamer Vorfahr gefunden werden soll.

Ähnlich wie beim Poset kann man auch bei einem Verband zu einem *Teilverband* übergehen, dazu muss man die Abgeschlossenheit bezüglich $\wedge$ und $\vee$ fordern:

DEFINITION 4.4.2. Teilverband

Ist $(P, \wedge, \vee)$ ein Verband. Ist $X \subset P$ eine Teilmenge und ist für $x, y \in X$ auch $x \vee y$ und $x \wedge y$ in X, so heisst $(X, \wedge, \vee)$ Teilverband von $(P, \wedge, \vee)$.

Zwei weitere wichtige Eigenschaften werden durch die bekannten Beispiele nahegelegt:

DEFINITION 4.4.3. distributiv, modular

Ein Verband $(P, \wedge, \vee)$ heisst *distributiv*, falls für $x, y, z \in P$ gilt:

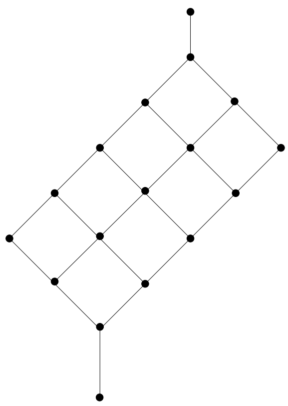
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Ein Verband $(P, \wedge, \vee)$ heisst *modular*, falls für $x, y, z \in P$ mit $z \leq x$ gilt:

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$

EXAMPLE. distributiver Verband



EXAMPLE 4.4.4. modulares Gesetz