KAPITEL 4

Posets

Im Abschnitt über Relationen (1.4) wurde Eigenschaften von Relationen über einer einzigen Grundmenge X definiert. Mithilfe dieser Eigenschaften wurden z.B. Äquivalenzrelationen definiert. Als weitere wichtige Art definieren wir:

DEFINITION. Poset, Halbordnung

Eine Relation R auf X heißt *Halbordnung*, wenn sie transitiv, reflexiv und schwach antisymmetrisch ist. Dies waren folgende drei Eigenschaften:

- R ist *reflexiv*, falls xRx (für alle $x \in X$).
- R ist *schwach antisymmetrisch*, falls (für alle $x, y \in X$) aus xRy und yRx stets $x = y$ folgt.
- R ist *transitiv*, falls (für alle $x, y, z \in X$) aus xRy und yRz auch xRz folgt.

Die Menge X mit einer Halbordnung R heißt *Poset* (partially ordered set).

EXAMPLE. Poset

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, zusammen mit der Teiler Relation ist ein Poset $(\mathbb{N}, |)$.

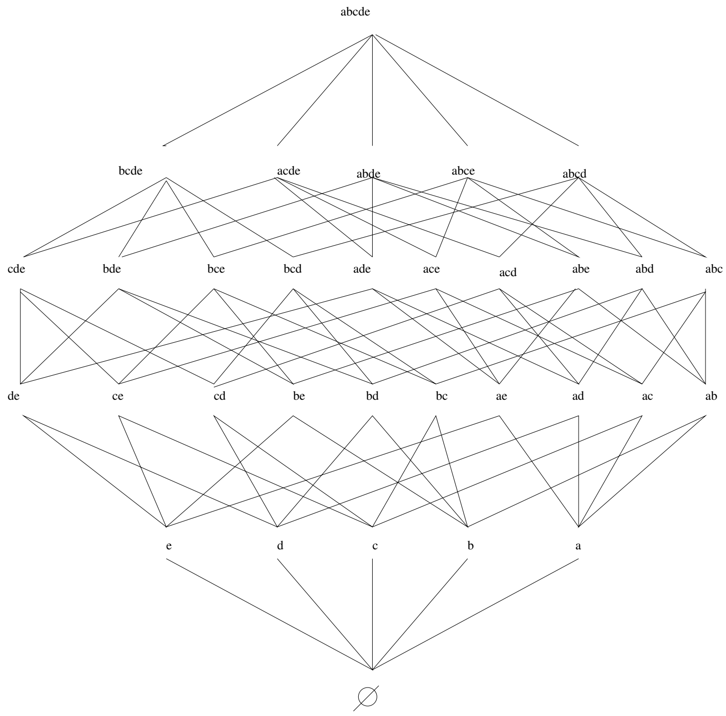
Die Potenzmenge $P(X)$ zusammen mit der $\subset$ Relation ist ein Poset $(P(X), \subset)$.

Jede Teilmenge eines Posets ist wieder ein Poset.

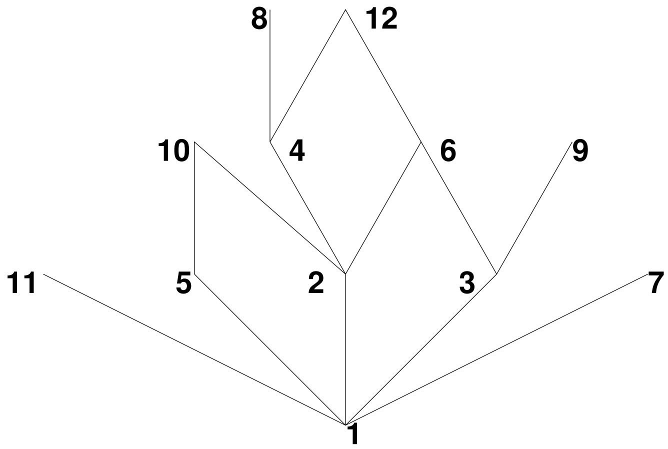
4.1. Hasse Diagramm

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Arbeit mit (endlichen) Posets (X, R), ist das Hasse Diagramm, dazu definiert man als erstes: x ist *direkter Vorgänger* von y falls xRy und es existiert kein z, welches dazwischen passt, d.h. mit xRz und zRy. Nun definiert man das *Hasse Diagramm*, als einen Graph mit Knotenmenge X, und einer Kante xy falls x direkter Vorgänger von y ist. Zeichnet man diesen Graphen, so werden Vorgänger unterhalb ihrer Nachfolger gezeichnet. Dann kann man sich auch die Pfeile an den Kanten sparen.

EXAMPLE 4.1.1. Hasse Diagramm $P(\{a, b, c, d, e\})$



Ein weiteres Beispiel, für $X = \{1, 2, \ldots, 12\}$ und der Beziehung xRy falls x teilt y. Dies ergibt folgendes Bild:

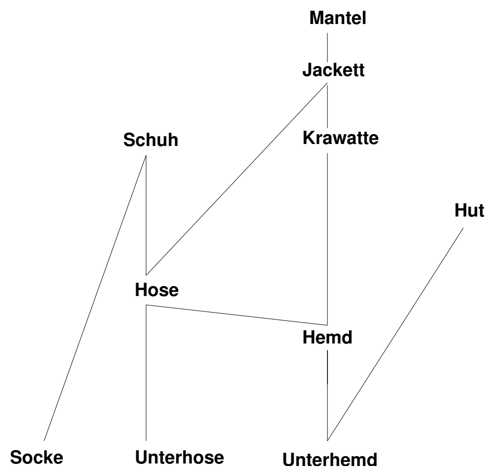


Ein weiteres Beispiel für den Einsatz von Halbordnungen ist die Ablaufplanung von Einzelschritten, dann gilt xRy wenn eben x vor y passieren muss. Die Antisymmetrie ist wichtig, sie verhindert Kreise im Hasse Diagramm

EXAMPLE 4.1.2. Ablaufplanung Anziehen

Hose, Unterhose, Hemd, Unterhemd, Krawatte, Schuhe, Socken, Jackett, Mantel, Hut.

Das ergibt dann folgendes Hasse Diagramm:



4.2. topologisches Sortieren

Aus dem Beispiel der Ablaufplanung wird folgendes Problem deutlich. Im Falle eines endlichen Posets (X, R) mit k Elementen ist man an einer Nummerierung $x_1, \ldots, x_k$ der Elemente interessiert mit der Eigenschaft $x_i R x_j \Rightarrow i < j$. Im Beispiel der Ablaufplanung bekommt man so eine mögliche Reihenfolge der Aktionen. Man nennt eine entsprechende Sortierung der Elemente eine *topologische Sortierung*.

ALGORITHM 4.2.1. *topologisches Sortieren*

input: poset (X, R) mit k Elementen

output: topologische Sortierung $x_1, \ldots, x_k$

init:index=0, v(x):= Anzahl der direkten Vorgänger von x

loop: solange es ein x mit v(x)=0 gibt

{

x_{index} =v; index++;

erniedrige v(y) für alle direkten Nachfolger y von x

}

EXAMPLE 4.2.2. Anziehen topologisches Sortieren

4.3. Satz on Dilworth

Wie schon an den beiden Beispielen klar hat man Namen für folgende Phänomene in einem Poset (P, R): Zwei Elemente $x, y \in P$ heissen *unvergleichbar*, falls weder xRy noch yRx gilt. Im Beisiel der Teilmengen sind z.B. die beiden Teilmengen ab und bc unvergleichbar. Ein Poset, in dem es keine unvergleichbaren Elemente gibt heisst *Kette*. Manchmal nennt man sowas auch Totalordnung oder lineare Ordnung. Da jede Teilmenge eines Posets wieder ein Poset ist (!) werden auch entsprechende Teilmenge eines Posets als Kette bezeichnet. So ist $\{2, 4, 8\}$ eine Kette im Teiler poset. Eine Menge von paarweise unvergleichbaren Elementen wird als *Antikette* bezeichnet. Im Teiler poset ist z.B. $\{2, 9, 7, 5\}$ eine Antikette.

EXAMPLE 4.3.1. Kette

Die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der gewöhnlichen Ordnung $<$ ist eine Kette.

Zwischen Ketten und Antiketten gibt es einen wichtigen Zusammenhang:

THEOREM 4.3.2. *Satz von Dilworth* [DILWORTH 1950]

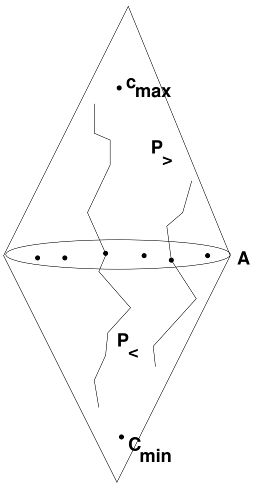
In einem endlichen poset P ist die Größe der grössten Antikette gleich der Anzahl von Ketten in einer minimalen Zerlegung von P in Ketten.

BEWEIS. Wir machen das per Induktion nach der Anzahl der Elemente in P. Der Anfang für ein Element ist klar.

Für den Induktionsschritt betrachten wir eine maximale Kette C im poset. Es kann nun 2 Fälle geben:

Fall 1: jede maximum Antikette hat einen nicht leeren Schnitt mit C. Wir entferne C aus P und die Länge jeder Antikette wird um 1 reduziert und wir machen weiter per Induktion nach $|P|$.

Fall 2: Es gibt eine maximum Antikette A die nicht mit C schneidet. Nimm das maximal Element c_{max} von C, es ist vergleichbar mit einen Element aus A (sonst könnte A vergrössert werden) und c_{max} ist grösser als jedes vergleichbare Element von A (sonst könnte man C vergrössern). Das gleiche gilt für das minimale Element c_{min} von C. Also haben wir ein Element c_{max} welches grösser ist als ein Element aus A und ein Element c_{min} welches kleiner ist als ein Element aus A. Nun können wir mittels Induktion zuschlagen:



Die Elemente in P sind dann entweder in A oder größer als ein Element aus A oder kleiner als ein Element in A. Der übrigbleibende Fall, dass eine Element unvergleichbar ist zu allen Elementen aus A kann nicht sein da A eine maximum Antikette ist. Betrachte jetzt das Poset $P_>$ aus allen Elementen die nicht kleiner sind als ein Element aus A. (das ist ein kleineres Poset wegen c_{min}) A ist immer noch eine maximum Antikette und nach Induktion können wir das kleinere Poset mit $|A|$ Ketten überdecken. Alle Ketten haben ein minimales Element aus A. Genauso betrachtet man das kleinere Poset $P_<$ aller Elemente von P die nicht grösser sind als ein Element aus A und wieder bekommt man $|A|$ Ketten die das poset überdecken, nun mit einem maximalen Element aus A. Klebt man beide Ketten bei den Elementen aus A zusammen bekommt man den Satz. □

Eine Element m heiss *maximal* (*minimal*) wenn es kein anderes Element x gibt mit mRx. Im Beispiel des Teiler-posets sind die Elemente $11, 10, 8, 12, 9, 7$ maximal. Das Element 1 ist das einzige minimale Element. Ein Element m heisst *maximum* (*minimum*) wenn xRm für alle Elemente x aus P. Beim Teiler poset ist 1 ein minimum Element und es gibt kein maximum Element. Bei den Teilmengen ist $\emptyset$ ein minimum und $abcde$ ist ein maximum Element.

LEMMA 4.3.3. *Ein minimum (maximum) ist eindeutig.*

BEWEIS. nachrechnen □

Also spricht man dann von dem minimum Element und dem maximum Element.