KAPITEL 1

Mengen und Relationen

1.1. Mengenlehre

Georg Cantor (3.3.1845 - 6.1.1918):

Cantor ist der Vater der modernen Mengenlehre, er definierte 1895:

DEFINITION 1.1.1. Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Hat man es mit endlichen Mengen zu tun, so kann man sie in Mengenklammern als durch Komma getrennte Auflistung der Elemente hinschreiben. So ist z.B.

$$\{-1, -2, 0, 1, 2\}$$

die Menge aller ganzen Zahlen die sich von 0 um höchstens 2 unterscheiden. Die Eigenschaft Element in einer Menge zu sein wird mit " $\in$ " bezeichnet.

$$2 \in \{-1, -2, 0, 1, 2\}$$

Die *leere Menge* ist eine Menge ohne Element und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

$$\emptyset = \{\}$$

Zwei endliche Mengen sind gleich (mit $=$bezeichnet), wenn sie die gleichen Elemente haben, das bedeutet aber bei der Auflistung, dass sich die Reihenfolge unterscheiden kann, so z.B.

$$\{-1, -2, 0, 1, 2\} = \{0, -1, 1, -2, 2\}.$$

Eine Menge mit m Elementen, kann auf $m! = 1 \times 2 \times \ldots \times m$ (sprich $m-$*Fakultät*) verschiedene Weisen als Folge der Elemente geschrieben werden.

Das Wort wohlunterschieden in der Definition bedeutet, dass in einer Menge ein Element nicht mehrfach vorkommen kann. Man betrachtet aber auch nicht endliche (=unendliche) Mengen. Dann kann nicht mehr jedes Element einzeln aufgelistet werden, man verwendet folgende Notation:

$$M = \{x : E(x)\}$$

wobei $E(x)$ irgendeine Eigenschaft ist, die entscheidet, ob x in der Menge liegt. So z.B.

$$M = \{x : x \text{ ist eine ganze Zahl größer } 7\}$$

was man auch so schreibt

$$M = \{x : x \in \mathbb{N}, x > 7\} = \{x \in \mathbb{N} : x > 7\}.$$

Diese Definition von Mengen über Eigenschaften verwendet man auch bei endlichen Mengen:

$$M = \{x : x \text{ ist ein bestechlicher Schiedsrichter }\}$$

Will man Elemente mehrfach zulassen, so spricht man von *Multimengen*. Es wird aber die gleiche Notation verwendet:

$$M = \{10, 10, 20, 50, 20\} = \{x : x \text{ ist ein Geldstück in meiner Hosentasche }\}$$

1.1.1. Abzählbarkeit. Die Anzahl der Elemente in einer Menge M ist die *Kardinalität* (oder Ordnung) $|M|$ von M. Bei endlichen Mengen sind diese Kardinalitäten natürliche Zahlen. Wenn wir alle Elemente einer unendlichen Menge M mit Nummern $0, 1, 2, \cdots$ beschriften können, ohne ein Element auszulassen, so ist M *abzählbar*. Dies bedeutet M hat die gleiche Kardinalität wie die natürlichen Zahlen.

THEOREM 1.1.2. *Die ganzen Zahlen sind abzählbar.*

BEWEIS. Die ganzen Zahlen listen wir wie folgt auf: $0, 1 - 1, 2, -2, \ldots, i, -i, \ldots$. In dieser Reihenfolge werden die Zahlen $i, -i$ jeweils mit dem Index $2i - 1, 2i$ beschriftet. □

THEOREM 1.1.3. *Die Brüche mit ganzzahligen Zähler und Nenner sind abzählbar.*

BEWEIS. Hierfür lege ein zweidimensionales Schema (Matrix) an, deren Zeilen durch die möglichen Zähler z und die Spalten durch die möglichen Nenner n beschrieben werden. Dies geschieht in der Reihenfolge wie sie für die soeben bewiesene Abzählbarkeit der ganzen Zahlen. (Beim Nenner natürlich beginnen wir nicht mit der 0, sondern gleich mit der 1)

	$n = 1$	$n = -1$	$n = 2$	$n = -2$		
$z = 0$	$0/1$	$0/-1$	$0/2$			
$z = 1$	$1/1$	$1/-1$				
$z = -1$	$-1/1$	$-1/-1$				
$z = 2$	$2/1$					
$\vdots$						

Die gesuchte Nummerierung mit $0, 1, 2, \ldots$ der Brüche erhalten wir nun indem wir nacheinander die Diagonalen (rechts oben nach links unten) durchlaufen. Dies ergibt folgende Nummerierung:

	0	1	3	6		
	2	4	7			
	5	8				
	9					

□

Die wichtige Erkenntnis von Cantor war, dass es auch sog. *überabzählbare* Mengen gibt, dies sind unendliche Mengen, die nicht abzählbar sind.

THEOREM 1.1.4. *Die reellen Zahlen sind überabzählbar.*

BEWEIS. (**Cantorsche Diagonalisierungsverfahren**) Jede reelle Zahl besitzt eine Dezimaldarstellung mit gegebenenfalls unendlich vielen Stellen. Wir können solche Zahlen bilden, bei denen alle Stellen nur die Werte 0 oder 1 besitzen. Wären die reellen Zahlen abzählbar, so könnten wir auch diese Zahlen mit 0-1 Stellen abzählen. Listen wir sie in der Abzählreihenfolge auf, so besitzt die i-te Zahl an der i-ten Stelle einen festen Wert 0 oder 1. Das ermöglicht uns eine neue reelle Zahl r zu konstruieren, die auch nur die Werte 0 oder 1 besitzt, aber die nicht aufgelistet wurde. Wir setzen als Wert der i-ten Stelle von r eine 0 ein, wenn das i-te Element in der Abzählung an dieser Stelle eine 1 besitzt und analog eine 1, wenn das i-te Element in der Abzählung an dieser Stelle eine 0 besitzt. Dann kann r in dieser Abzählung nicht vorkommen. □

Es gibt weitere Kardinalitäten als die der reellen Zahlen. Diese wollen wir jedoch hier nicht weiter untersuchen, da sich schwierige logische Probleme auftun. Insbesondere wird als Hypothese (**Kontinuumshypothese** von Georg Cantor) aufgestellt, dass jede Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ endlich, abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist. Diese Hypothese ist weder beweisbar noch widerlegbar nach Kurt Gödel(1938) und Paul Cohen (1963).

Für die Informatik folgt: *Die Menge der Programme, die über einem festen Alphabet geschrieben werden können, ist abzählbar. Aber die Anzahl der Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ ist überabzählbar (=nicht abzählbar). Daher kann keine Computersprache erlauben, jede solche Abbildung durch ein Programm in dieser Sprache zu berechnen.*

1.1.2. Hilberts Hotel. Hilberts Hotel, ist ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern. Ist das Hotel voll belegt, so kann es dennoch einen weiteren Gast aufnehmen, indem alle bereits eingezogenen Gäste jeweils in das Zimmer mit der nächsthöheren Nummer ziehen und der neue Gast Zimmer Nr. 0 nimmt. Sogar abzählbar unendlich viele neue Gäste können Platz finden, indem jeder bereits eingezogene Gast von seinem Zimmer mit der Nr. n in das Zimmer mit der Nr. $2n$ zieht.

PROBLEM 1.1.5. Leider hat diese Vorgehensweise den Nachteil, dass Gäste eventuell nachts umziehen müssen. Wie kann man dieses Problem lösen?

1.1.3. Russellsche Antinomie. Hier sieht man ein Problem in der Mengenlehre nach Cantor. Betrachte folgende Menge:

$$M := \{A : A \notin A\}$$

Dies ist die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Nun stellt sich die Frage:

$$M \in M?$$

- Nehmen wir an $M \in M$, dann ist M eine Menge die sich nicht selbst enthält (nach Definition von M) also muss $M \notin M$ gelten.
- Nehmen wir andererseits an $M \notin M$, dann ist M aber nach obiger Definition in M, also $M \in M$.

Beide Möglichkeiten führen zu einem Widerspruch, ein sogenanntes Paradoxon.

1.2. Operationen mit Mengen

Eine *Teilmenge* T einer Menge M ist eine Menge deren Elemente alle Element von M sind. Dies wird mit $T \subset M$ oder auch $T \subseteq M$ bezeichnet. Man spricht von einer *echten* Teilmenge falls T verschieden ist von $M.(T \neq M)$ Dies wird auch als $T \subsetneq M$ geschrieben. Die Menge aller Teilmengen von M ist die *Potenzmenge*, sie wird mit $P(M)$ bezeichnet, wobei neben dieser Notation noch weitere vorkommen.

EXAMPLE 1.2.1. leere Menge
Sei $M = \{a, b, c\}$, dann ist die Potenzmenge

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}.$$

LEMMA 1.2.2. *Kardinalität von $P(M)$*
Sei M eine endliche Menge dann ist

$$|P(M)| = 2^{|M|}.$$

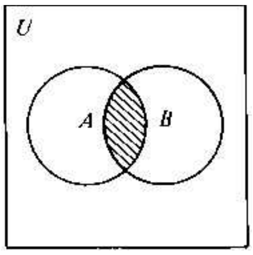
BEWEIS. Sei $|M| = m$. Betrachte den *charakteristischen Vektor* $(v_1, \ldots, v_m)$ einer Teilmenge von M. Dieser wird definiert durch die Vorschrift: v_i ist 1 falls das $i-$te Element von M in der Teilmenge ist, oder 0 sonst. Nun gibt es genausoviel verschiedene charakteristische Vektoren wie Teilmengen. Die Anzahl der charakteristischen Vektoren ist gerade 2^m. □

Besondere Teilmengen M sind die leere Menge und die Menge M selber, als charakteristische Vektoren sind dies der überall-0 Vektor und der überall-1 Vektor. Aufgrund dieses Lemmas wird auch die Notation 2^M für die Potenzmenge verwendet. Mit Teilmengen einer Grundmenge werden weitere Operationen definiert:

DEFINITION 1.2.3. Mengenoperation
Seien $S, T \subseteq M$.

- $S \cup T = \{x | x \in S \text{ oder } x \in T\}$ ist die *Vereinigung* von S und T.
- $S \cap T = \{x | x \in S \text{ und } x \in T\}$ ist der *Durchschnitt* von S und T.
- $\bar{T} = M \setminus T = \{x | x \in M \text{ und nicht } x \in T\}$ ist das *Komplement* von T (in M).
- $S \oplus T = S \cup T \setminus S \cap T$ ist die *symmetrische Differenz* von S und T.

Mengen mit leerem Durchschnitt nennt man *disjunkt*(oder elementfremd). Diese Operationen werden gerne mit den sog. *Venn-Diagrammen* visualisiert.



Man verwendet auch (in Analogie zum Summenzeichen) die Notation

$$\cup_{i=1,\ldots} M_i$$

um zum Beispiel eine Vereinigung über mehrere Mengen M_i zu beschreiben.
Für diese Operationen (Vereinigung, Durchschnitt, Komplement) gelten folgende Rechenregeln:

LEMMA 1.2.4. *Rechenregeln in $P(M)$*
Seien $R, S, T \subseteq M$, dann gelten

- *die Idempotenzgesetze* $S \cup S = S$ *und* $S \cap S = S$,
- *die Komplementgesetze* $S \cup \overline{S} = M$ *und* $S \cap \overline{S} = \emptyset$,
- *die Kommutativgesetze* $S \cup T = T \cup S$ *und* $S \cap T = T \cap S$,
- *die Assoziativgesetze* $R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T$ *und* $R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T$,
- *die Distributivgesetze* $R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T)$ *und* $R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T)$,
- *die Absorptionsgesetze* $R \cup (S \cap R) = R$ *und* $R \cap (S \cup R) = R$,
- *die Existenz von Null und Eins:*
  - $S \cup \emptyset = S$ *und* $S \cap \emptyset = \emptyset$
  - $S \cup M = M$ *und* $S \cap M = S$.
- *die De Morganschen Regeln:*
  - $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cap \overline{T}$ *und* $\overline{S \cap T} = \overline{S} \cup \overline{T}$

BEWEIS. Beim Beweis von Gleichheiten zwischen Mengen ($A = B$), geht man gerne wie folgt vor: Man zeigt im ersten Schritt, dass alle Elemente aus A auch in B liegen, also $A \subset B$. Im zweiten Schritt zeigt man dann $B \subset A$. Wir führen dies am Beispiel der ersten de Morganschen Regel vor:Sei $x \in \overline{S \cup T}$. Dann liegt x nicht in $S \cup T$, also weder x in S noch x in T. Das bedeutet, dass $x \in \bar{S}$ und $x \in \bar{T}$, also $x \in \bar{S} \cap \bar{T}$ liegt. Damit ist $\overline{S \cup T} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$ gezeigt. Nun sei umgekehrt $x \in \bar{S} \cap \bar{T}$ gegeben. Dann ist x weder in S noch in T. Also liegt x nicht in $S \cup T$ sondern im Komplement $\overline{S \cup T}$. □

Eine wichtige Folgerung aus obigen Eigenschaften ist:

COROLLARY 1.2.5.

Seien S, T *endliche Mengen, dann gilt*

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

BEWEIS. Um die Kardinalität (im endlichen Fall) einer Vereinigung zu bestimmen, addiere ich einfach die beiden endlichen Zahlen $|S|$ und $|T|$. Dabei hat man einen Fehler gemacht, nämlich die gemeinsamen Elemente (dies sind $|S \cap T|$ viele) wurden doppelt gezählt, also werden sie einmal abgezogen. □

Diese Vorgehensweise lässt sich natürlich verallgemeinern, so benötigt zur folgenden Aufgabe drei Mengen:

PROBLEM 1.2.6.

Zeigen Sie, dass folgende Daten inkonsistent sind:

Von 50 Studenten, studieren 23 Mathematik, 14 Chemie und 17 Physik. 5 studieren Mathematik und Physik, 3 Mathematik und Chemie. 7 Studenten sind in Physik und Chemie eingeschrieben. 12 Studenten studieren keines dieser Fächer.